

Kural 7: (Bileşke Fonksiyonun Türevi)

f ve h iki türevlenebilen fonksiyon olsun.

$(f \circ h)(x) = f(h(x))$ olarak bulunurdu.

$(f \circ h)'(x)$ bileşke fonksiyonun türevi için;

1.yol: $(f \circ h)'(x) = h'(x) \cdot f'(h(x))$ olarak alınır.

$$(f \circ h)'(x) = [f(h(x))]' = h'(x) \cdot f'(h(x))$$

Önce iç kısmın
türevi alınır.

Sonra fonksiyonun
türevi alınır.

2.yol: Önce bileşke fonksiyon yani $(f \circ h)(x)$ bulunur
ve elde edilen fonksiyonun türevi alınır.

Soru: $f(x) = x^2 + 2x$ ve $h(x) = 6x - 10$ ise
 $(f \circ h)'(x) = ?$

2. yof:

Soru: $f(x) = x^2 - 5x + 1$ ve $h(x) = x^2 + 3x$ ise
 $(f \circ h)'(3) = ?$

Soru : $f(x) = x^2 + 4$ ve $h(x) = \frac{2}{x^2} + 1$ ise
 $(f \circ h)'(-1) = ?$

Soru : $f(x) = 27 - 8x$ ve $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ise
 $(h \circ f)'(3) = ?$

Soru :

x	f (x)	h (x)	f ' (x)	h ' (x)
1	- 5	2	1	5
2	1	2	3	4

Tabloda verilen değerlere göre;

A) (f o h) ' (1) = ?

B) (h o f) ' (2) + (f o f o h) (2) = ?

Soru : $f(x) = 3x - 4$, $h(x) = x^2 + x + 1$ ve $k(x) = 2x$
ise $(f \circ h \circ k)'(3/8) = ?$ (Üçlü bileşke fonksiyonda bileşke
fonksiyon bulunur ve ardından türev alınır.)

Soru : $f(2x - 4) = 4x^2 - 6x + 1$ ise $f'(2) = ?$ (Verilen,
 $f(h(x))$ bileşke fonksiyon gibi görülür ve eşitliğin türevi alınır.
İç kısmı sağlayan x değeri için sonuç bulunur.)

Soru : $f(4 + 5x) = 3x - x^2 + x^3$ ise $f'(-6) = ?$

Soru : $f(x^2 - 5) = 8\sqrt{x} - 2x$ ise $x \in \mathbb{Z}^+$ için $f'(11) = ?$

Soru : $f (2x^2 - 3x) = 12x^3 - 5x$ ise $x \notin \mathbb{Z}$ için $f' (- 1) = ?$

Soru : $f(3x + 7) = h(x^2 - 4x)$, $h'(12) = 21$ ise
 $f'(25) = ?$

Soru : $f(8 - 2x) = k(4x) \cdot h(3x - 1)$ eşitliği veriliyor.

$k(0) = 6$, $h(-1) = 4$, $k'(0) = 5$ ve $h'(-1) = -1$ ise
 $f'(8) = ?$

Kural 8: (Parantez Kuvveti Olan Fonksiyonun Türevi)

f türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $y = a \cdot [f (x)]^n$ ise (veya $y = a \cdot f^n (x)$)
 $y' = a \cdot n \cdot [f (x)]^{n-1} \cdot f' (x)$ olarak alınır.

Soru: $f (x) = 5 \cdot (x^4 + 3x)^2$ ise $f' (- 1) = ?$

Soru : $f(x) = (x^3 - 3x + 2)^3$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = (x^5 - 4x^2)^2 + \frac{1}{x^3}$ ise $f'(1) = ?$

Soru : $f(x) = \frac{5x}{(2x - 1)^4}$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = \left(\frac{2x + 8}{3x - 2} \right)^3$ ise $f'(2) = ?$

Soru : $f(x) = [2x + (x - 5)^2]^2$ ise $f'(1) = ?$

Soru : $f(x) = [x^2 + (3x - 2)^3]^4$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$ ise $f'(2) = ?$

Soru : $f (x) = \sqrt[4]{ (5x + 1)^3 }$ ise $f'(0) = ?$

Soru : $f(x) = 3x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ ise $f'(\sqrt{8}) = ?$

Soru: $f(x) = \sqrt[4]{x + 6\sqrt{x}} + 10$ ise $f'(4) = ?$

Soru : $f^3(x) = 2x + x^3 + 15$ ise $f'(2) = ?$

Soru : $f^2(x) = x^4 + 4x - 1$ ise $f'(1)$ ifadesinin pozitif değeri kaçtır ?

Soru : $f^2(x + 5) = 3x^2 + x^4$ ise $f'(4)$ ifadesinin negatif değeri kaçtır ?

Kural 9: (Zincir Kuralı)

$y = h(t)$ ve $t = k(x)$ olsun. Yani fonksiyonlar x yerine başka bir değişkene bağlılar. O halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad \text{olarak alınır. Bu yönteme “ zincir kuralı ”}$$

adı verilir. Yani her fonksiyonun kendi değişkenine bağlı olarak türevi alınır. **Bu değişkenler x gibi düşünülür.**

$y = h(t)$, $t = k(z)$ ve $z = g(x)$ olsun. O halde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{olarak alınır.}$$

Soru : $y = 5t - 11$ ve $t = x^3 + 1$ ise $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = 2$ için sonucunu bulunuz.

Soru : $y = 3t^2 + 2$, $t = 2u + 1$ ve $u = x^3 + x$ ise $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $u = 0$ için sonucunu bulunuz.

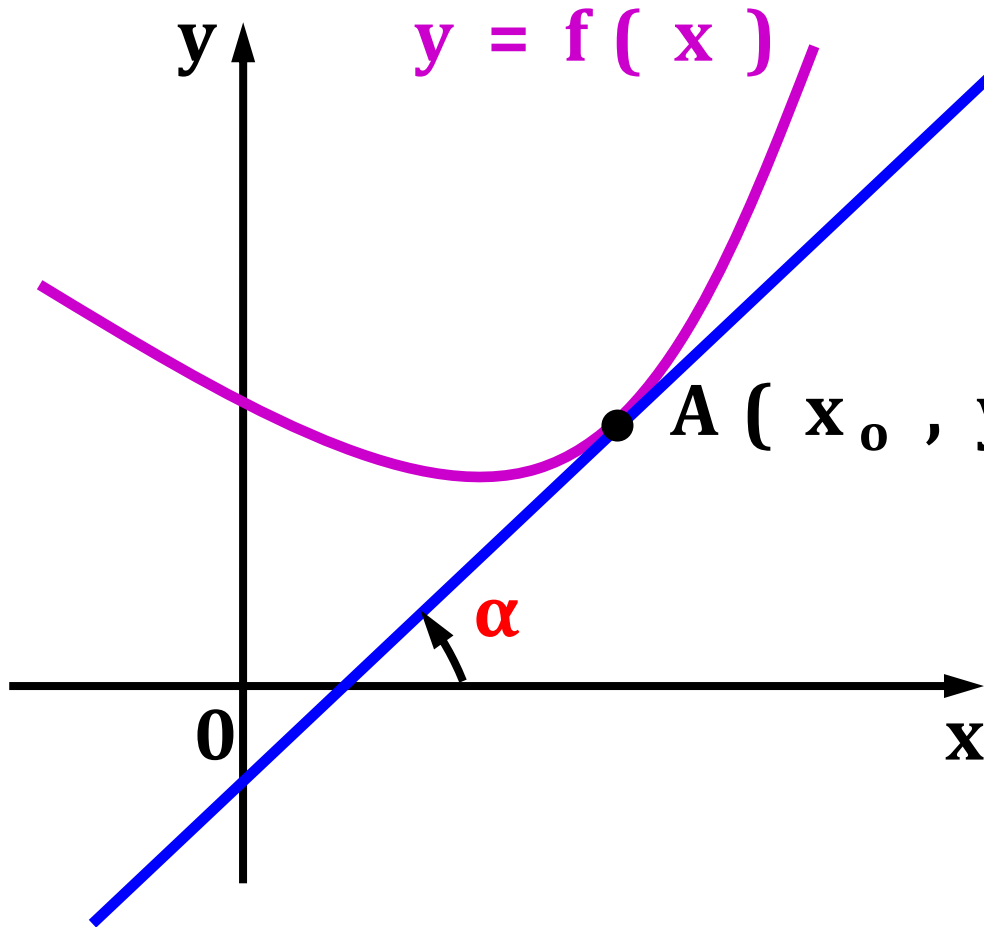
Soru : $t = x^2 - 2x$, $y = 2 + 3u$ ve $u = t^2 - 1$ ise $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $u = 0$ için x 'in tam sayı değeri için sonucunu bulunuz.

Soru : $p = 2v^2 - 1$, $k = \sqrt{q} + 3$ ve $v = k^2 + k$ ise $\frac{dp}{dq}$

ifadesinin $q = 4$ için sonucunu bulunuz.

Kural 10: (Türev – Eğim İlişkisi)

Zamana bağlı konun fonksiyonu $x(t)$ için; fonksiyona $A(t_0, x(t_0))$ noktasında teğet olan bir d doğrusu için, fonksiyonun bu noktadaki türevi d doğrusunun eğimine eşit olduğunu türevin başında işlemiştik.



$$d : y = mx + n$$

f fonksiyonuna A noktasında teğet olan bir d doğrusu verilsin.

Fonksiyonun A noktasındaki türevinin değeri doğrusunun eğimini verir.

$$f'(x_0) = m_d \text{ olarak alınır.}$$

$$m_d = \tan \alpha \text{ idi.}$$

Doğru denklemi $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ olarak bulunurdu.

Soru: $y = f(x) = 2x - x^2 + 3$ eğrisine $x = 3$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Soru : $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ eğrisine $x = -1$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Soru : $y = f(x) = (3x - 2) \cdot (5 - x)$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Soru : $y = f(x) = \frac{x + 1}{2x - 3}$ fonksiyonunun $A(x, -2)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

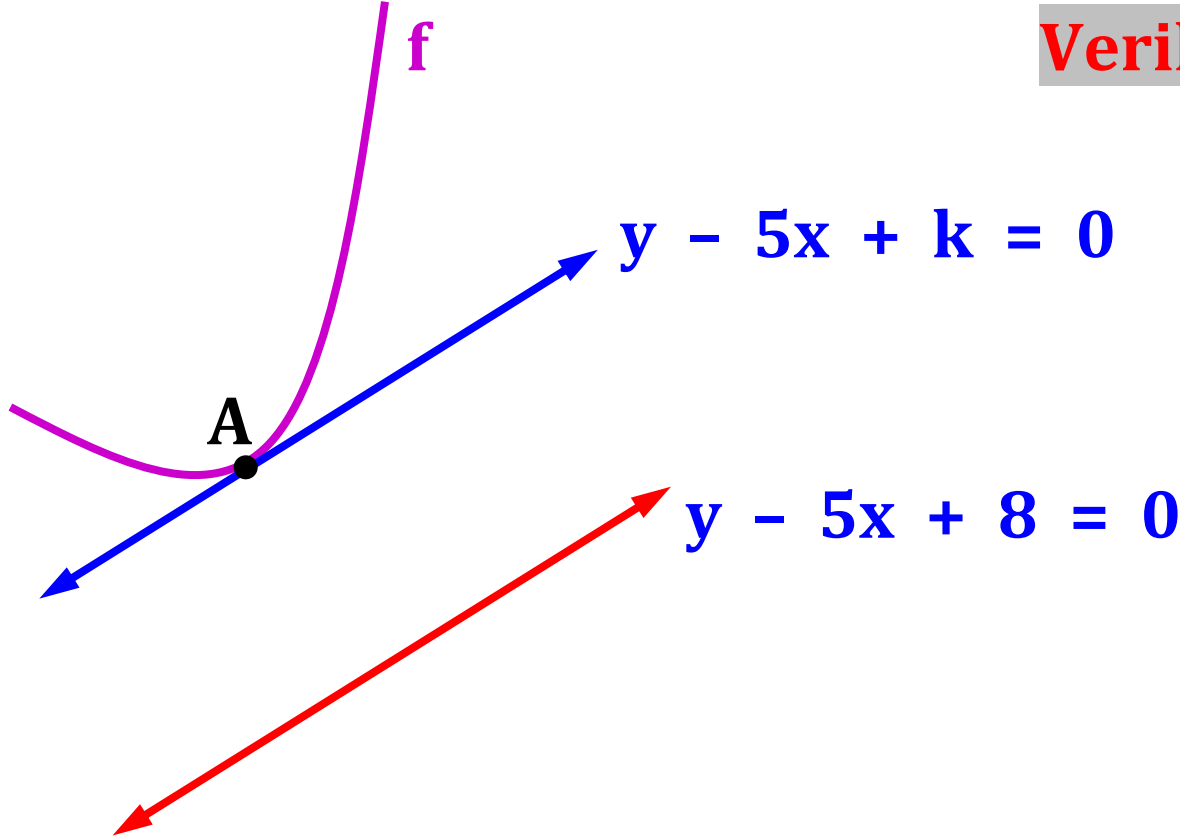
Soru : $y = f(x) = \sqrt{16 - 2x}$ fonksiyonunun $x = \frac{15}{2}$ apsis-
li noktasındaki teğetinin x eksenine yaptığı pozitif yönlü açının ölçüsü kaç derecedir ?

Soru: $y = f(x) = x^3 + kx^2 + x$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasında teğet olan doğrunun denklemi $2y - 2x + 1 = 0$ ise $k = ?$

Soru: $y = f(x) = x^2 - 4x + k$ eğrisine teğet olan doğrunun denklemi $2x - y + 5 = 0$ ise teğet noktasını ve k değerini bulunuz.

Soru: $y = f(x) = x + x^2$ fonksiyonunun grafiği üzerinde olan ve denklemi $y - 5x + 8 = 0$ olan doğruya en yakın noktasının;

A) Koordinatlarını bulunuz.



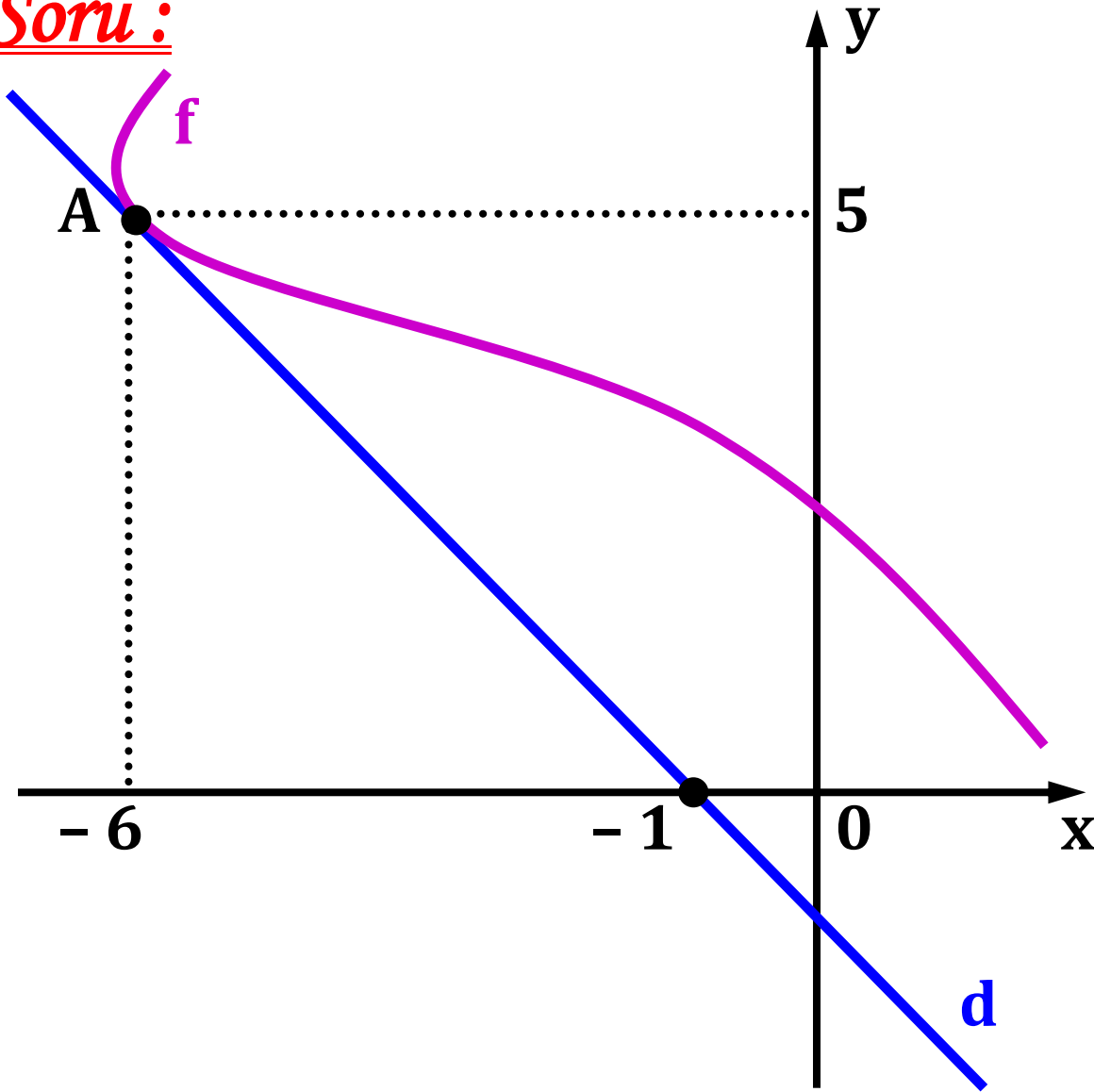
Verilen doğruya paralel olan ve f'e teğet olan doğru çizilir ve eğim - türev ilişkisinden nokta bulunur.

B) Bu doğruya olan uzaklığını bulunuz.

Soru : $y = f(x) = (4x - 2) \cdot (3 - x)$ fonksiyonun grafiği
üzerinde olan ve denklemi $2x + y - 9 = 0$ olan doğruya en yakın
noktayı bulunuz.

Soru: $y = f(x) = x^2 + kx + m$ ve $y = h(x) = -x^2 + nx$ fonksiyonları $(1, 0)$ noktalarında birbirine teğettir. Buna göre k , m ve n sayılarını bulunuz. (Nokta denklemleri sağlar. Teğet doğrularının eğimleri de birbirine eşitlenir.)

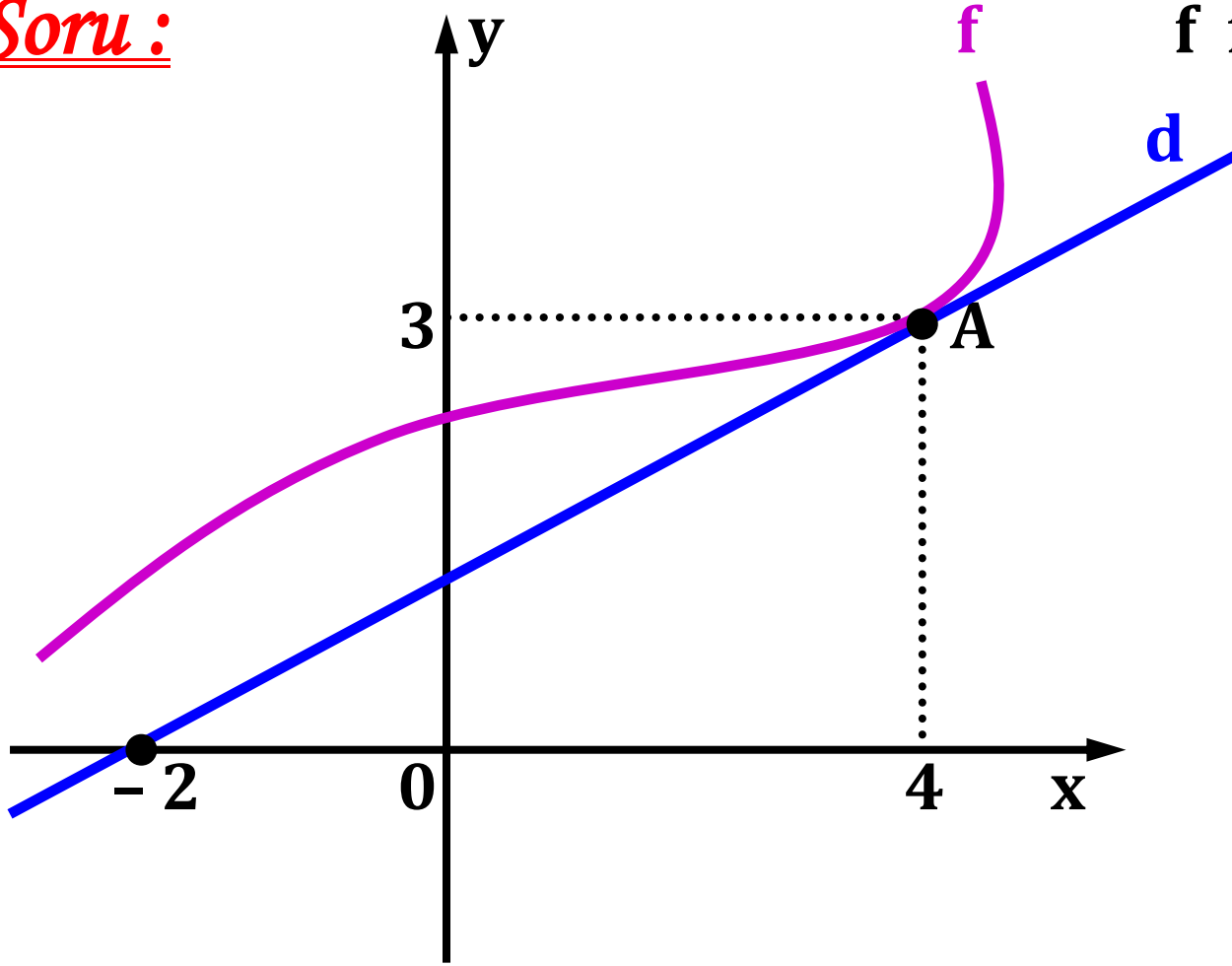
Soru :



**f fonksiyonu A noktasında d
doğrusuna teğettir.**

$$k(x) = x \cdot f(x) \text{ ise}$$
$$k'(-6) = ?$$

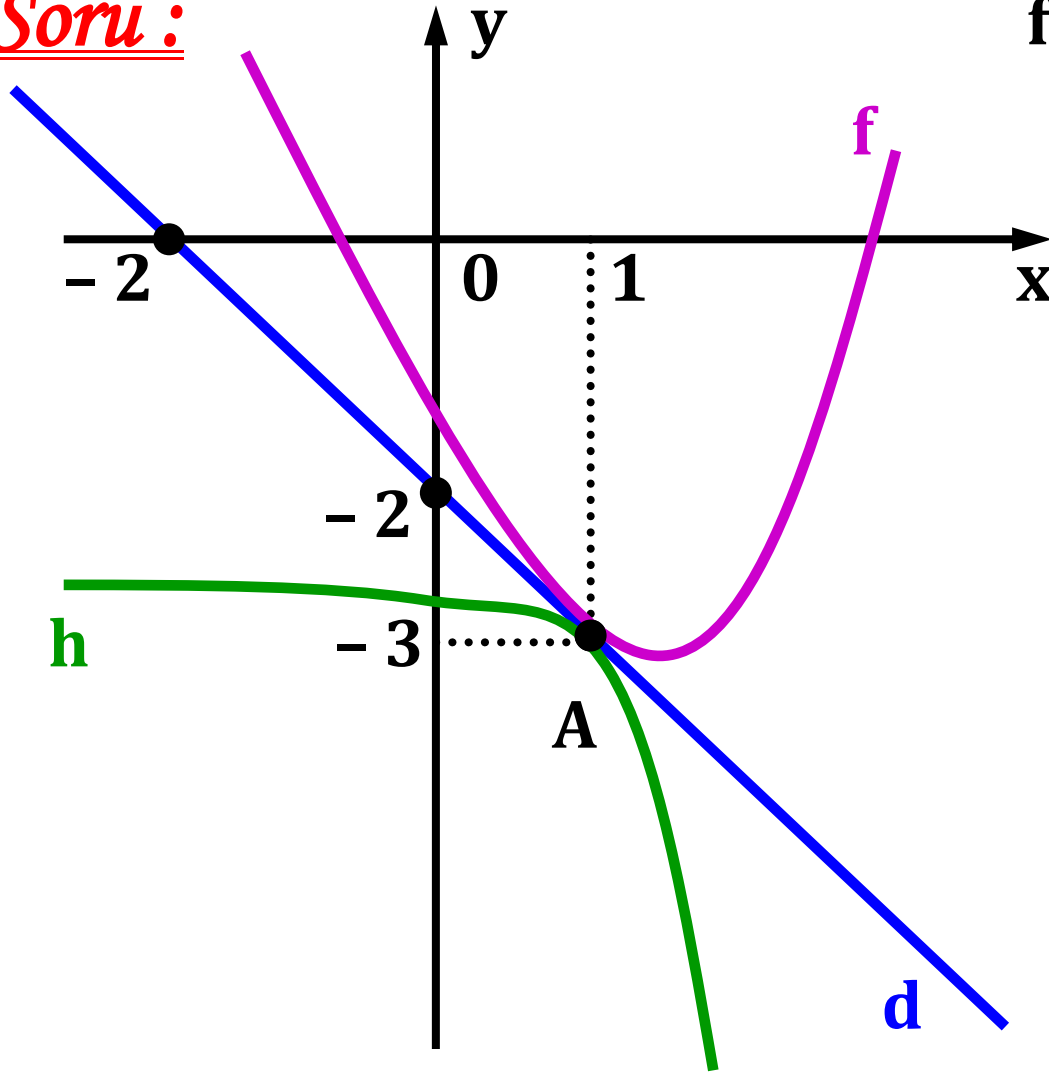
Soru :



f fonksiyonu A noktasında d
doğrusuna teğettir.

$$k(x) = x^2 \cdot f(x) + 1$$
$$k'(4) = ?$$

Soru :

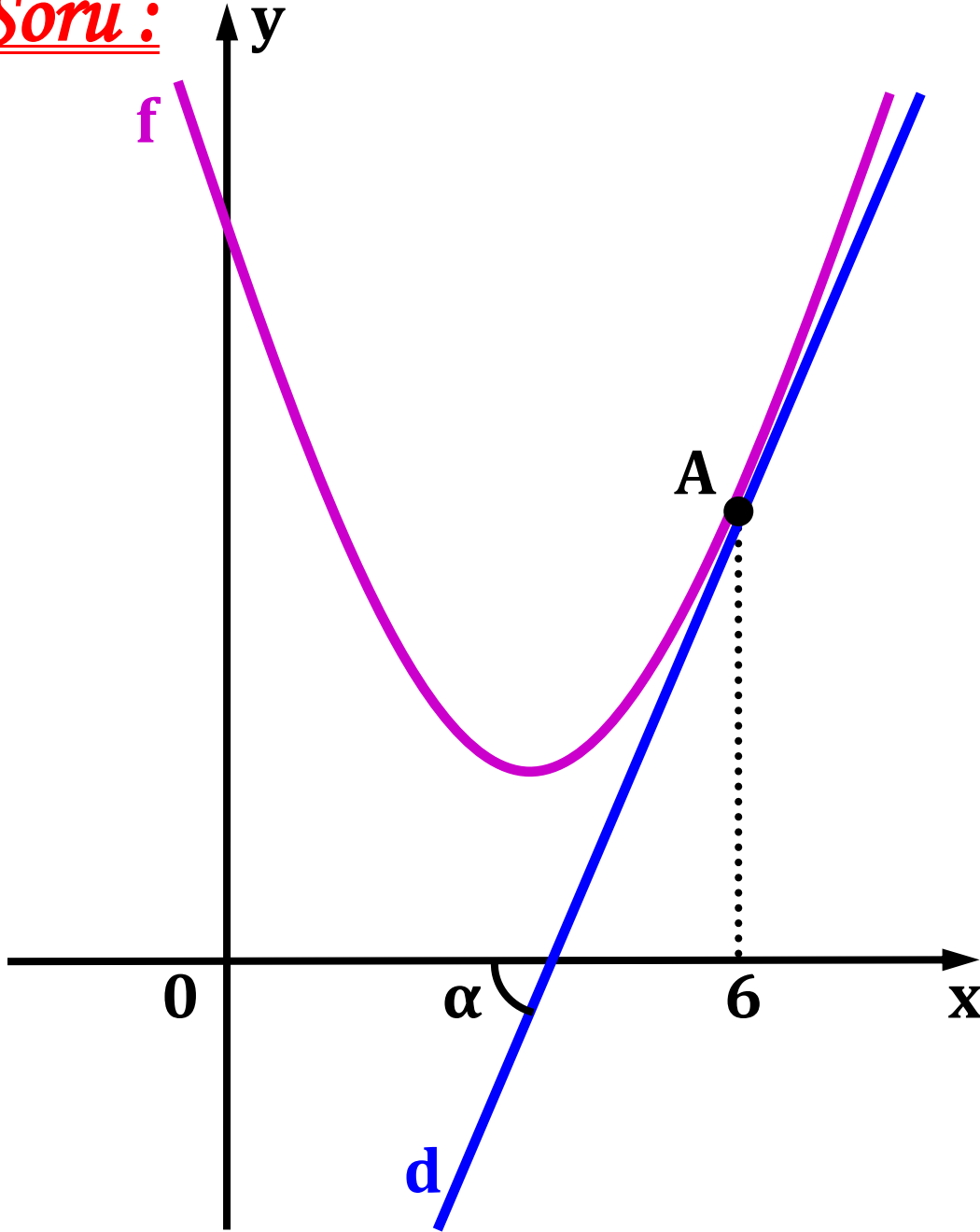


f ve h fonksiyonu A noktasında d doğrusuna ve birbirlerine teğettir.

$$k(x) = \frac{f(x)}{h(x)} + f(x) \cdot \sqrt[3]{x}$$

ise $k'(1) = ?$

Soru :



$f(x) = x^2 + tx + 18$ parabolü
ile d doğrusu A noktasında
birbirlerine teğettir. $\tan \alpha = 4$
olup $k(x) = f^2(2x - 4)$
ise; A) $k'(5) = ?$

B) d doğrusunun eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

Kural 11: (Türev – Süreklilik İlişkisi)

Bir f fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ için **sürekli** olmak üzere, fonksiyonun $x = a$ noktasındaki sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit ise bu fonksiyon $x = a$ için türevlenebilirdir.

f fonksiyonu $x = a$ için **sürekli** ve $f'(a^+) = f'(a^-) = k$ ise $f'(a) = k$ olarak alınır.

*** Bir fonksiyonun $x = a$ noktası için sürekliliği belirtilmemişse işleme öncelikle süreklilik kontrolü ile başlanır. Süreklilik sağlanırsa ardından sağdan ve soldan türev kontrolü yapılır. Süreklilik sağlanmazsa türev kontrolüne gerek yoktur.

Not: 1) f fonksiyonu bir noktada **türevli** ise bu noktada aynı zamanda da **sürekli**dir.

2) f fonksiyonu bir noktada sürekli ise bu noktada türevi vardır diyemeyiz.

3) f fonksiyonu bir noktada sürekli değil ise bu noktada türevi de yoktur.

Soru : $f(x) = \begin{cases} 1 + x & , x < 1 \text{ ise} \\ 2 & , x = 1 \text{ ise} \\ x^2 + 1 & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun $x = 1$ değeri için türevi varsa bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & , \quad x < -1 \text{ ise} \\ \frac{1}{x} + 4 & , \quad x \geq -1 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun

$x = -1$ değeri için türe-

vi varsa bulunuz.

Soru :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & , \quad x < 8 \quad \text{ise} \\ x - 4 & , \quad x = 8 \quad \text{ise} \\ \frac{5x + 20}{x - 23} & , \quad x > 8 \quad \text{ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun
x = 8 değeri için türe-
vi varsa bulunuz.

Soru : $f(x) = |x^2 - 16|$ ise $f'(4) = ?$ (Fonksiyon parçalı olarak yazılır, limit ve türev şartları kontrol edilir.)

Soru: $f(x) = |x^2 - 6x + 9|$ ise $f'(3) = ?$

Soru : $f(x) = \begin{cases} ax^3 + b, & x < -2 \text{ ise} \\ 12x + 2b, & x \geq -2 \text{ ise} \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun $x = -2$ değeri için türevi varsa $k.m = ?$

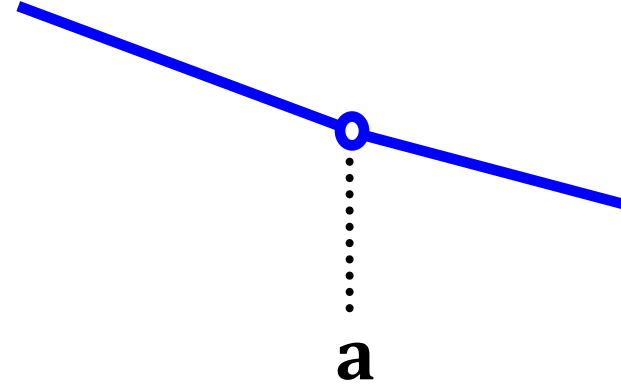
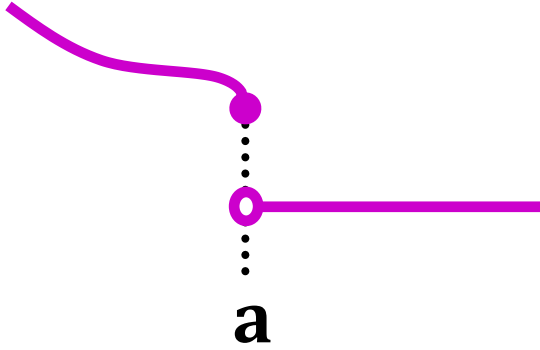
Soru :

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 4 & , \quad x \leq 1 \text{ ise} \\ 2x^2 + mx & , \quad x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonunun
 $x = 1$ değeri için türevi
varsa $k.m = ?$

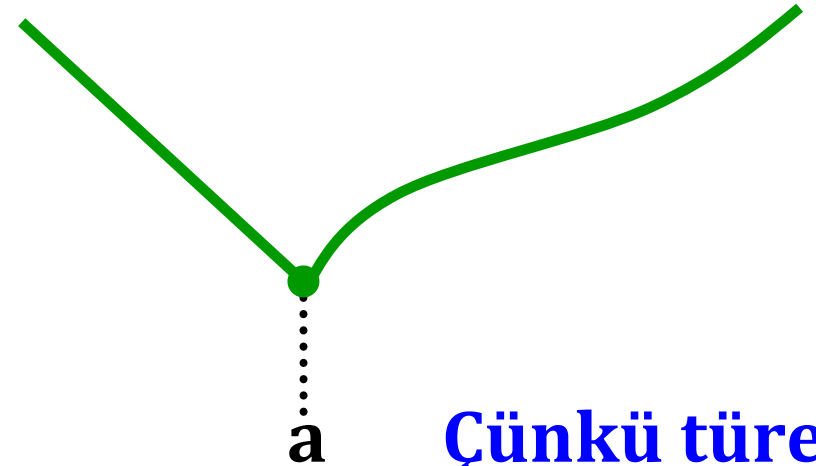
Soru : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 6 & , x \leq 0 \text{ ise} \\ 3bx + 5 + b & , 0 < x < 3 \text{ ise} \\ -x^3 + cx - 9 & , x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun $x = 0$ değeri için türevi var ama $x = 3$ için sürekli değil ise c sayısı kaç olamaz ?

Not: 1) **Kritik** noktalar yani grafikte kesintinin olduğu noktalarda fonksiyon sürekli değildir. Dolayısıyla bu kritik noktalarda fonksiyon türevsizdir.



Fonksiyon $x = a$ noktasında sürekli olmadığı için bu noktada türevli de değildir.

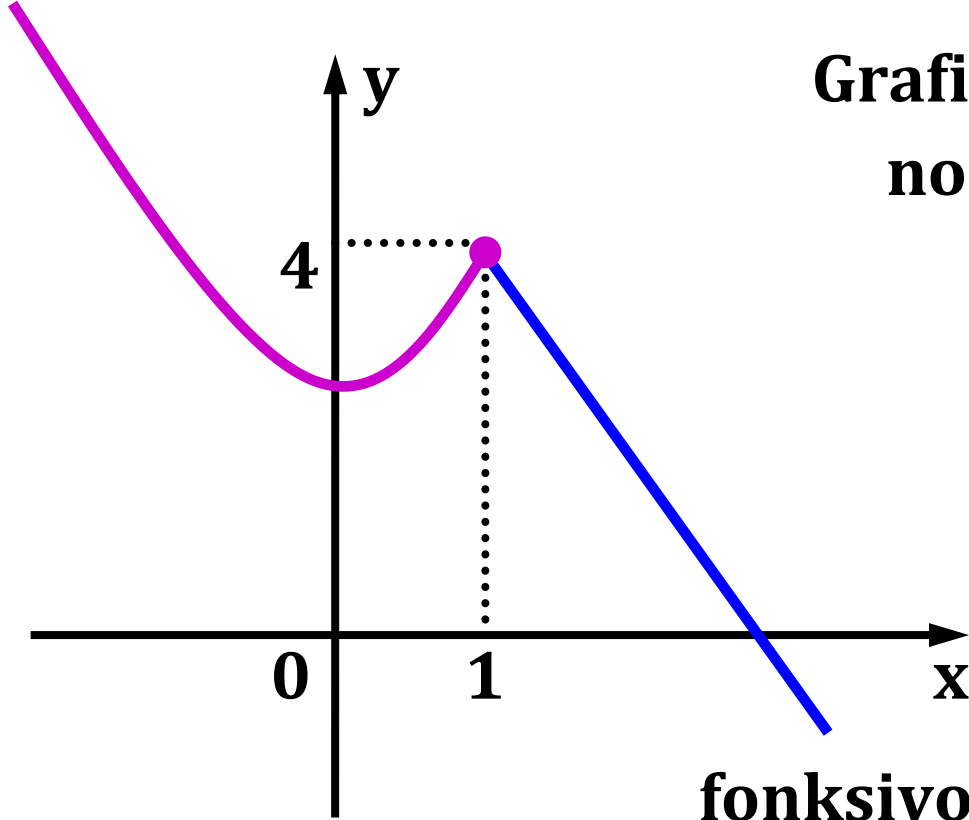
2) Fonksiyon **kırılma** (grafiğin sol ve sağ kısımları farklı) noktalarında sürekli olmasına rağmen bu noktalarda türevli değildirler.



Çünkü türev sonuçları (fonksiyona teğet olan doğruların eğimi) farklıdır.

Örneğin $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x \leq 1 \text{ ise} \\ -2x + 6 & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun alalım.

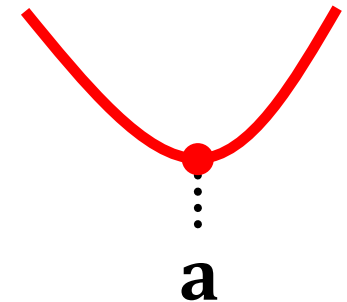
Grafiğe baktığımızda f fonksiyonu $x = 1$ noktasında süreklidir. Ama bu noktada türevi inceleyelim.



$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 2x + 0 = 2.1 = 2 \\ f'(1^+) &= -2 + 0 = -2 \end{aligned} \right\}$$

$f'(1^+) \neq f'(1^-)$ olduğundan
fonksiyon $x = 1$ noktasında türevli değildir.

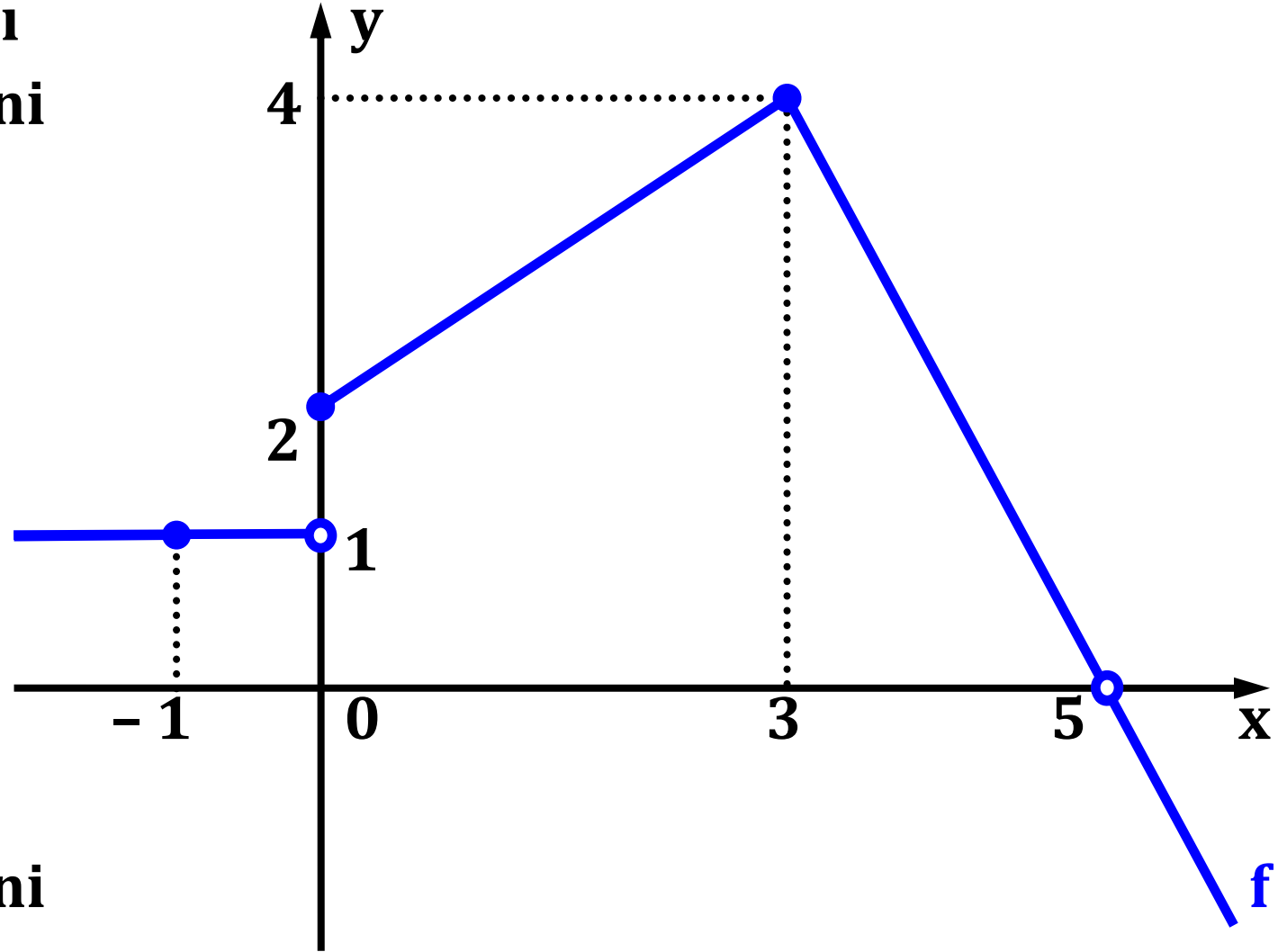
**3) Fonksiyonun $x = a$ noktasının sağında ve
ve solunda aynı grafik devam ediyorsa fonk-
siyon bu noktada hem sürekli hem de türevlidir.**



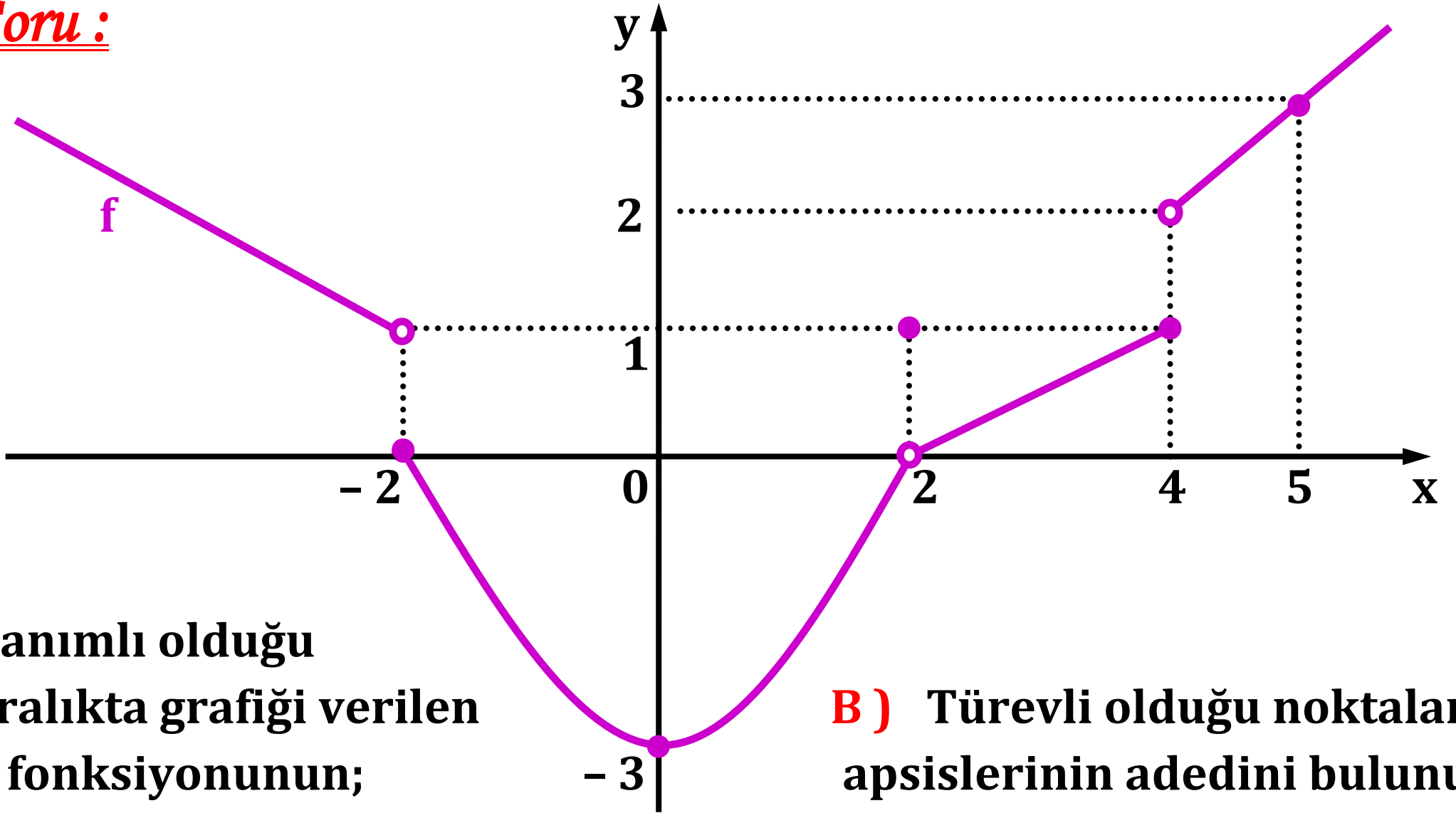
Soru : Tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilen f fonksiyonunun;

A) Türevli olmadığı noktaların apsiserini bulunuz.

B) Sürekli olduğu halde türevinin olmadığı noktaların apsiserini bulunuz.



Soru :

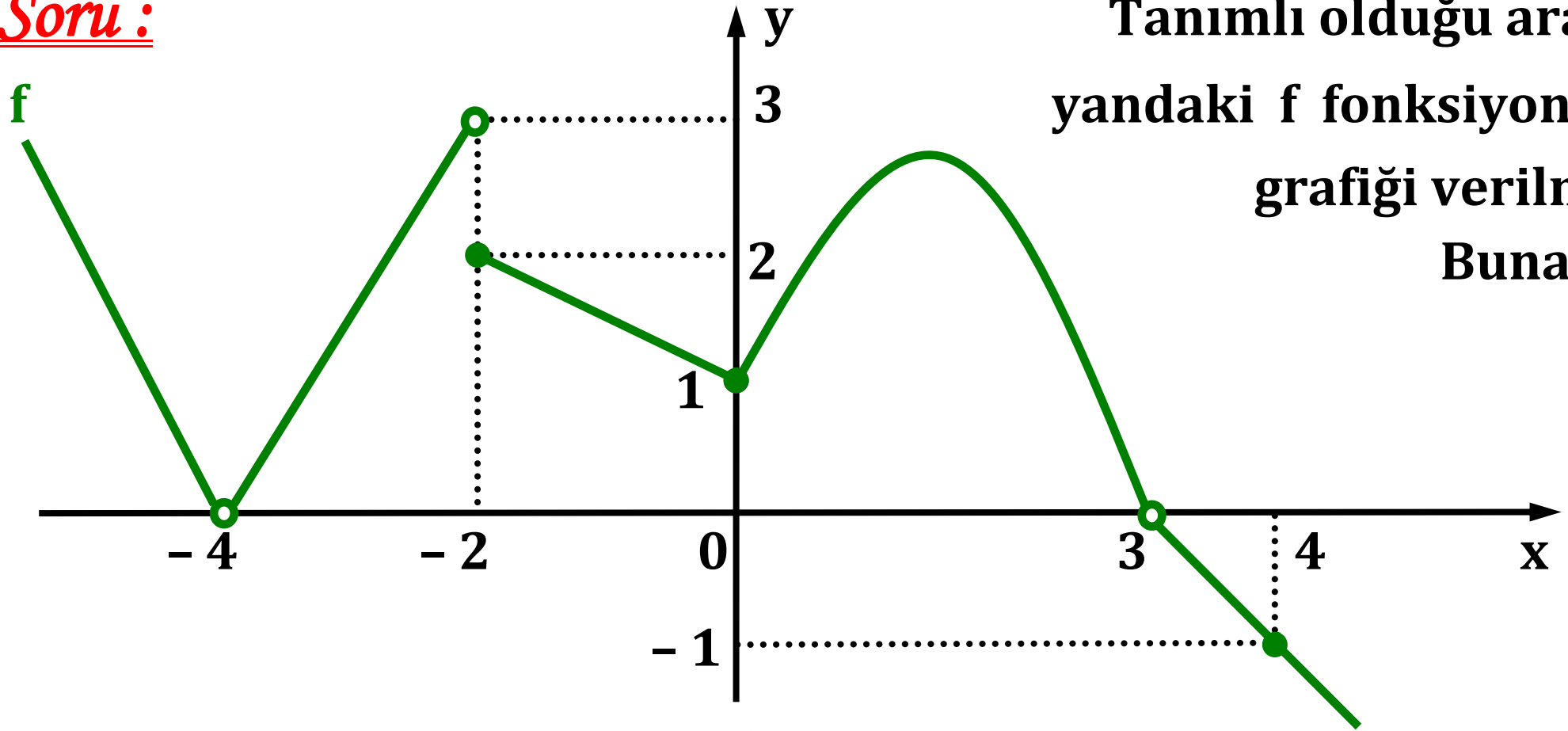


Tanımlı olduğu
aralıkta grafiği verilen
f fonksiyonunun;

A) Türevli olmadığı noktaların
apsisleri toplamı kaçtır ?

B) Türevli olduğu noktaların
apsislerinin adedini bulunuz.

Soru :



Tanımlı olduğu aralıkta
yandaki f fonksiyonunun
grafiği verilmiştir.
Buna göre;

- A)** Fonksiyonun türevli olduğu noktaların apsislerini bulunuz.
- B)** Fonksiyonun türevli olduğu en geniş tanım kümesini yazınız.