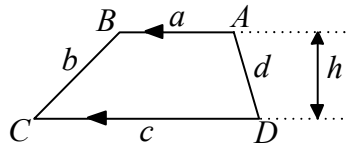


Geometri Notları

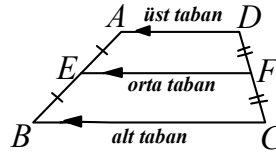
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

Yamuk

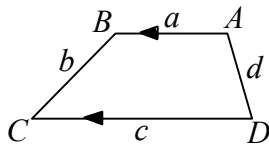
Bir $ABCD$ dörtgeninde $BC \parallel AD$ veya $AB \parallel DC$ ise bu dörtgene **yamuk** denir. Yani karşılıklı kenar çiftlerinden en az biri birbirleriyle paralel olacak. "Sadece" değil "en az". Eğer iki çift de birbirleriyle paralelse dörtgen paralelkenar olur ama paralelkenar da bir yamuktur. Kısacası, iki kenarın birbirine paralel olması yamuk olmak için yeterlidir.



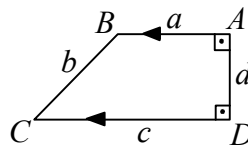
Paralel olan kenarlara (yan şekilde a ve c) **tabanlar**, diğerlerine (b ve d) **yan kenarlar** denir. a 'ya **üst taban**, c 'ye de **alt taban** denir. Paralel kenarlar arasındaki uzaklık da (h) yamuğun yüksekliğidir. Paralellikten dolayı $m(A) + m(B) = 180^\circ$ ve $m(C) + m(D) = 180^\circ$ dir.



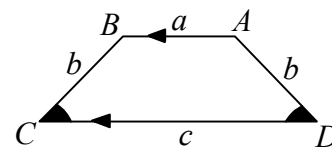
Yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir. Orta taban, tabanlara paraleldir ($AD \parallel EF \parallel BC$). Ayrıca uzunluğu da alt taban ile üst tabanın toplamının yarısıdır. Yani; üst taban, orta taban ve alt taban bir aritmetik dizi oluşturur.



Çeşitkenar yamuk



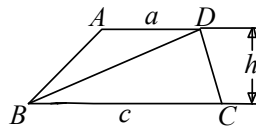
Dik yamuk



İkizkenar yamuk

Yamuklar kenarlarına göre 3 farklı şekilde sınıflandırılabilir. Yan kenarları farklı uzunlukta olanlara **çeşitkenar yamuk**, eşit uzunlukta olanlara **ikizkenar yamuk**, yan kenarlarının biri ile tabanlarının dik keşişine **dik yamuk** denir.

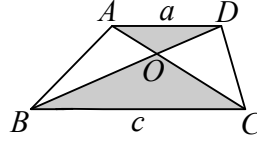
İkizkenar yamuk ve dik yamukta köşegenler de birbirini dik keserlerse şekiller **ikizkenar dikgen yamuk** ve **dik dikgen yamuk** adını alırlar.



Teorem. Bir yamuğun alanı orta taban ile yüksekliğin çarpımıdır.

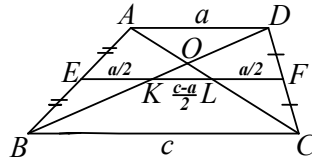
Kanıt: ADB üçgeninin alanı $ah/2$ ve BDC üçgeninin alanı $ch/2$ 'dir. Bu alanların toplamı yamuğun alanını verdiğinden $Alan(ABCD) = (ah/2) + (ch/2) = (a + c)h/2$ dir. Diğer yandan $(a + c)/2$ orta tabanın boyu olduğundan kanıt bitmiş olur.

Teorem. Yamukta köşegenler birbirini tabanlar oranında böler.



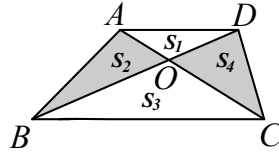
Kanıt: $AD \parallel BC$ olduğundan yanda taranan kebek oluşur. AOD ile COB benzerliğinden $|AO|/|OC| = |DO|/|OB| = a/c$.

Teorem. Üst tabanı a , alt tabanı c olan yandaki $ABCD$ yamuğunda $[EF]$ orta tabanı köşegenleri K ve L noktalarında kesiyorsa $|EK| = |LF| = a/2$, $|EL| = |KF| = c/2$, $|KL| = |c - a|/2$, $|DK| = |KB|$ ve $|AL| = |LC|$ 'dir.



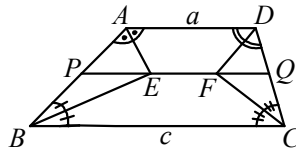
Kanıt: $[EF]$ orta taban olduğundan AD 'ye paraleldir. O halde $[EK]$ ve $[LF]$ de sırasıyla ABD ve ACD üçgenlerinde orta tabandır. $|EK| = |LF| = a/2$ ve aynı sebeple K ve L noktaları sırasıyla $[BD]$ ve $[AC]$ köşegenlerinin orta noktalarıdır. Diğer yandan $|EF| = (a + c)/2$ olduğundan $|KL| = |EF| - |EK| - |LF| = (c - a)/2$.

Teorem. Köşegenlerinin kesişim noktası O olan bir $ABCD$ yamuğunda $\text{Alan}(AOD) = S_1$, $\text{Alan}(AOB) = S_2$, $\text{Alan}(BOC) = S_3$ ve $\text{Alan}(COD) = S_4$ ise $S_2 = S_4$ ve $\text{Alan}(ABCD) = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})^2$.



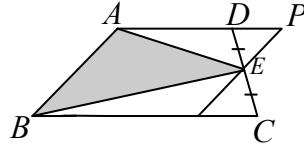
Kanıt: $AD \parallel BC$ olduğundan $\text{Alan}(BAC) = \text{Alan}(BDC)$ dir. Yani $S_2 + S_3 = S_4 + S_3$. Buradan $S_2 = S_4$ eşitliği kanıtlanmış oldu. Diğer yandan tüm dörtgenlerde $S_1 S_3 = S_2 S_4$ olduğunu biliyoruz. O halde $S_2^2 = S_4^2 = S_1 S_3$ olur. $A(ABCD) = S_1 + S_3 + S_2 + S_4 = S_1 + S_3 + 2 \cdot \sqrt{S_1} \cdot \sqrt{S_3} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3})^2$.

Teorem. Bir yamukta karşı durumlu açılarının açıortayları orta taban üzerinde dik kesişirler. Ayrıca kesişim noktaları arasındaki uzaklık; taban uzunlukları toplamı ile yan kenar uzunlukları toplamının pozitif farkının yarısıdır.



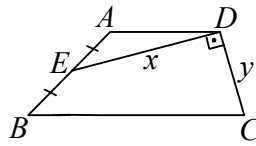
Kanıt: A ve B açılarının açıortaylarını çizelim. E' den tabanlara paralel bir doğru geçsin. $m(DAE) = m(PEA)$ ve $m(CBE) = m(PEB)$ olacağından BPE ve APE birer ikizkenar üçgen olur. Buradan P noktasının orta nokta olduğunu ve dolayısıyla $[PQ]$ 'nin orta taban olduğunu anlarız. Simetrik işlemler C ve D açıları için de yapılırsa kanıt biter. Buradan EF de hesaplanabilir. Taban uzunlukları a ve c , yan kenarlar uzunlukları da b ve d olsun. Muhteşem üçlü gereği $|PE| = b/2$ ve $|FQ| = d/2$ dir. $|PQ| = (a + c)/2$ olduğunu biliyoruz. O halde $|EF| = |PQ| - |PE| - |FQ| = (a + c - b - d)/2$.

Teorem. Bir yamukta yan kenarların birinin uç köşeleri ile diğer yan kenarın orta noktasının birleştirilmesi ile oluşturulan üçgenin alanı yamuğun alanının yarısıdır.



Kanıt: Yan şekildeki gibi E' den geçen ve AB' ye paralel olan bir doğru çizelim. $APQB$ paralelkenarını oluşturalım. DEP ile CEQ üçgenlerinin eşliğine dikkat edilirse yamuk ile paralelkenarın alanlarının denkliliği görülür. AEB üçgeninin alanı paralelkenarın alanının yarısı olduğundan yamuğun alanının da yarısı olmalıdır. Yani $\text{Alan}(AEB) = \text{Alan}(APQB)/2 = \text{Alan}(ABCD)/2$ dir. Yamukta bu kural sadece E orta nokta olduğunda geçerlidir. Dikkatinize!

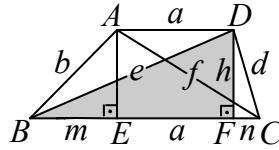
Teorem. Yandaki $ABCD$ yamuğunda $|AE| = |EB|$, $|ED| = x$, $|DC| = y$ ve $m(\angle EDC) = 90^\circ$ ise yamuğun alanı $x \cdot y$ dir.



Kanıt: Üstteki teoremi kanıtladıktan sonra bu sonuç zaten aşikar.

$$\text{Alan}(ABCD) = 2 \cdot \text{Alan}(EDC) = xy$$

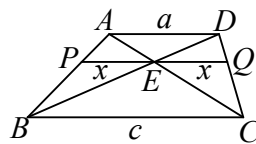
Teorem. Taban uzunlukları a ve b , yan kenar uzunlukları b ve d , köşegen uzunlukları e ve f olan bir yamukta $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$ dir.



Kanıt 1: A ve D köşelerinden alt tabana birer dikme indirelim. Bu dikmelerin boyları h olsun. c kenarını da şekildeki gibi m , a , n uzunluğundan üç parçaya bölsün. DFB üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $(m + a)^2 + h^2 = e^2$ ve AEC üçgeninde Pisagor Teoremi'nden $(n + a)^2 + h^2 = f^2$ eşitlikleri elde edilir. İlk denklemden h^2 yerine AEB üçgeninde Pisagor Teoremi'nden dolayı $b^2 - m^2$, ikinci denklemden de h^2 yerine DFC üçgeninde Pisagor Teoremi'nden dolayı $d^2 - n^2$ yazıp bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2a(m + a + n)$ yani $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$ bulunur ki kanıt biter.

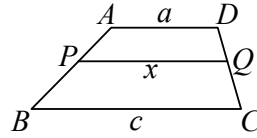
Kanıt 2: Bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin orta noktaları M ve N ise Euler Teoremi'nden $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4 \cdot |MN|^2$ olduğunu biliyoruz. Yamukta $|MN| = (|BC| - |AD|)/2$ değeri formülde yerine yazılırsa istenen eşitlik bulunmuş olur.

Teorem. Bir yamuğun köşegenlerin kesişim noktasından tabanlara paralel olarak geçen doğrunun yamuğun içinde kalan parçasının boyu taban uzunluklarının harmonik ortasıdır. Yani; $2x = 2ac/(a + c)$. Ayrıca E noktası $[PQ]$ 'nın orta noktasıdır.



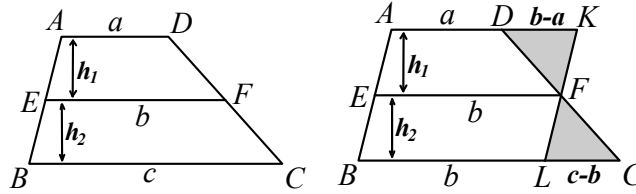
Kanıt: Kelebek'ten $AP/PB = DQ/QC = a/c$ dir. BAC üçgeninde Tales Teoremi'nden $a/(a + c) = PE/c$ ve BDC üçgeninde Tales Teoremi'nden $a/(a + c) = EQ/c$ olur. Buradan hem $PE = EQ$ olduğunu hem de $PE = EQ = x = ac/(a + c)$ olduğunu anlarız. Dolayısıyla istenen iki özellik de kanıtlanmış olur.

Teorem. Bir yamuğu benzer iki yamuğa bölen tabanlara paralel olacak şekilde çizilen doğrunun yamuğun içinde kalan parçasının boyu taban uzunluklarının geometrik ortasıdır.



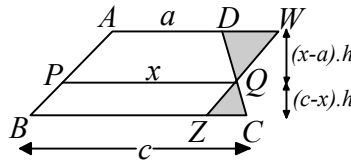
Kanıt: İstenilen doğru parçası yandaki $[PQ]$ ve boyu x olsun. $APQD$ ve $PBCQ$ yamukları benzer olduğundan alt ve üst yamukların oranı eşit olmalıdır. $a/x = x/c$ ise $x^2 = ac$.

Teorem. $ABCD$ yamuğunda uzunluğu a ve c olan tabanlara paralel olacak şekilde yan şekildeki gibi uzunluğu b olan bir EF doğru parçası çiziliyor. $AEFD$ ve $EBCF$ yamuklarının yüksekliklerinin oranı $(b - a)/(c - b)$ 'dir.



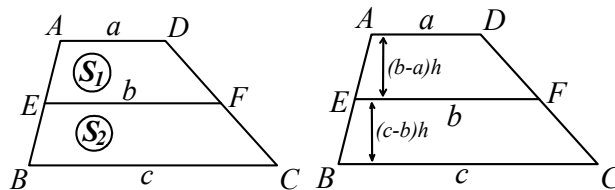
Kanıt: Yamuğun BC kenarı üzerindeki $|BL| = b$ olacak şekilde bir L noktası alıp $ABLK$ paralelkenarını oluşturalım. DKF ve CFL üçgenleri benzer olurlar. $|DK| = b - a$ ve $|LC| = c - b$ olduğundan $h_1/h_2 = (b - a)/(c - b)$ 'dir.

Teorem. Bir yamuğu alanları denk iki yamuğa bölen tabanlara paralel olacak şekilde çizilen doğrunun yamuğun içinde kalan parçasının boyu taban uzunluklarının karesel ortasıdır.



Kanıt: İstenilen doğru parçası yandaki $[PQ]$ ve boyu x olsun. $APQD$ ve $PBCQ$ yamuklarının alt ve üst taban boyları belli olduğundan eksik olan yükseklikleri bulunup alanları hesaplanıp eşitlenecek. Q' 'dan AB 'ye paralel şekilde geçen doğru ile $ABZW$ paralelkenarını oluşturalım. Taranmış olan kelebek oluşur. Kelebekte benzerlik oranı $(x - a)/(c - x)$ olduğundan üstteki yamuğun yüksekliği $(x - a)h$ ise alttaki yamuğun yüksekliği $(c - x)h$ olur. Alanlar eşitlenirse $(x + a)(x - a)h/2 = (c + x)(c - x)h/2$ bulunur. Denklem çözülmüşse $x^2 = (a^2 + c^2)/2$ bulunur. Bu x değeri de a ile c değerlerinin karesel ortası olduğundan kanıt tamamlanmış demektir.

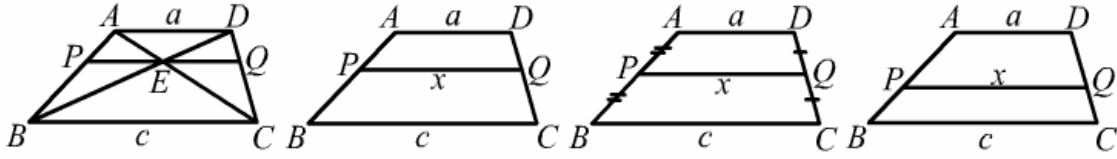
Teorem. $ABCD$ yamuğunda uzunluğu a ve c olan tabanlara paralel olacak şekilde yan şekildeki gibi uzunluğu b olan bir EF doğru parçası çiziliyor. $AEFD$ ve $EBCF$ yamuklarının alanları sırasıyla S_1 ve S_2 olsun. O halde $S_1/S_2 = (b^2 - a^2)/(c^2 - b^2)$.



Kanıt: $AEDF$ ve $EBCF$ yamuklarının yüksekliklerinin oranının $(b - a)/(c - b)$ olduğunu daha önce kanıtlamıştık. $S_1 = (b + a)(b - a)h/2$ ve $S_2 = (c + b)(c - b)h/2$ olduğundan $S_1/S_2 = (b^2 - a^2)/(c^2 - b^2)$.

Teorem. a ve c gibi farklı iki reel sayının harmonik ortası H , geometrik ortası G , aritmetik ortası A , karesel ortası K ile simgelenir. Daima $H < G < A < K$ dir.

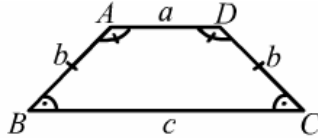
Kanıt: $c > a$ olmak üzere üst tabanı a , alt tabanı c olan bir $ABCD$ yamuğunda tabanlara paralel olacak şekilde bir $[PQ]$ çizelim.



Sonuç olarak; eğer $[PQ]$ köşegenlerin kesişim noktasından geçiyor ise uzunluğu taban uzunluklarının harmonik ortası (H), oluşan iki yamuğu benzer yapıyor ise geometrik ortası (G), orta taban ise aritmetik ortası (A) ve oluşan iki yamuğun alanları denk yapıyor ise karesel ortası (K) olduğunu kanıtlamış olduk. Şimdi de bu $[PQ]$ doğru parçalarının yukarıdaki sırada giderek boylarının uzadığını kanıtlamalıyız. $H < G$ 'dir çünkü $H \geq G$ olduğunda yamuklar benzer olmuyor. $G < A$ 'dır, çünkü G yamukları benzer yapıyor, üstteki yamuk alttaki yamuktan küçük olduğundan yüksekliği de küçük olmalı fakat $G \geq A$ olursa üst yamuğun yüksekliği alttakinin yüksekliğinden büyük veya eşit olur. $A < K$ 'dir, çünkü K yamukların alanlarını eşit yapıyor, $A \geq K$ olsaydı alttaki yamuğun alanının üsttekinden daha büyük olacağı aşikar. Böylelikle $H < G < A < K$ eşitsizliğini geometrik olarak kanıtlamış olduk.

Bu arada $a = c$ olursa $H = G = A = K$ olur. Çünkü $a = c$ durumunda yamuk paralelkenara dönüşür. Bir paralelkenarda orta taban hem tabanlara paraleldir, hem köşegenlerin kesişim noktasından geçer, hem alt ve üst paralelkenarları benzer yapar, hem de alt ve üst paralelkenarların alanlarını denk yapar. Gösterdiğimiz bu dört ortalamadan başka ortalamaların da sıralamadaki yerleri yamukta gösterdiğimiz bu metot ile gösterilebiliyor. Fakat onları bu geometri notlarında göstermeyeceğiz.

İkizkenar yamuk. Yan kenarları birbirine eşit olan yamuğa *ikizkenar yamuk* diyeceğiz. Bir ikizkenar üçgenin herhangi bir yerinden tabana paralel bir doğru ile kesilmiş hali gibi düşünebilirsiniz.

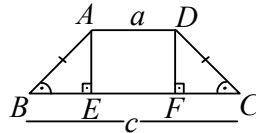


İkizkenar yamukta taban açıları eşittir. Dolayısıyla üst taban açıları da eşittir. İkizkenar yamuk özel bir yamuk olduğundan yamuğun tüm özelliklerini sağlar.

Teorem. Bir ikizkenar yamuğun köşegen uzunlukları birbirine eşittir.

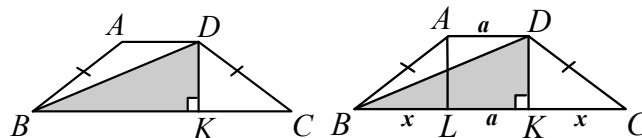
Kanıt: Üst şekilde CBA ile BCD üçgenleri (K-A-K) gereği eşittir. O halde $|CA| = |BD|$.

Teorem. Yandaki $ABCD$ ikizkenar yamuğunda tabanlar a ve c ise $BE = FC = (c - a)/2$.

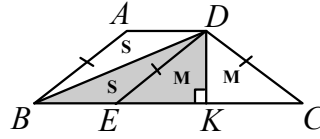


Kanıt: AEB ile DFC üçgenlerinin eşliğine dikkat edilirse $|BE| = |FC|$ olduğu görülür. $AEFD$ bir dikdörtgen olduğundan $|EF| = a$ 'dır. $|BE| + |FC| = c - a$ olduğundan $|BE| = |FC| = (c - a)/2$ 'dir. Siz de ikizkenar yamuk sorularını genelde $[AE]$ ve $[DF]$ dikmelerini çizerek çözmeye çalışınız.

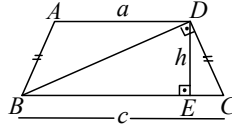
Teorem. Bir $ABCD$ ikizkenar yamuğunun D köşesinden BC kenarına inilen dikme ayağı K ise $\text{Alan}(ABCD) = 2 \cdot \text{Alan}(BKD)$ dir.



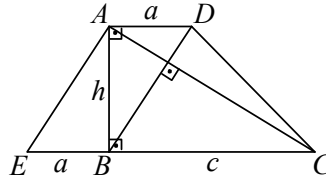
Kanıt 1: A köşesinden BC kenarına inilen dikme ayağı L olsun. $|BL| = |KC|$ olur. ABD , BKD ve DKC üçgenlerinin yükseklikleri eşit ve $|BK| = |AD| + |KC|$ olduğundan $\text{Alan}(BKD) = \text{Alan}(ABD) + \text{Alan}(DKC)$ 'dir. Bu da bizi kanıtlanması istenen eşitliğe götürür.



Kanıt 2: D 'den AB 'ye paralel bir doğru çizilirse, $ABED$ bir paralelkenar ve EDC bir ikizkenar üçgen olur. Taralı alanın da yamuğun sorusu olduğu sırtır.

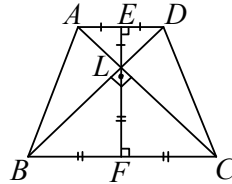


Teorem. Köşegenleri yan kenarlarını dik kesen bir ikizkenar yamuğun tabanları a ve c , yüksekliği h ise $h^2 = |c^2 - a^2|/4$.



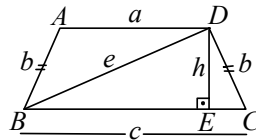
Kanıt: D köşesinden tabana indirilen dikme ayağı E olsun. $|EC| = (c - a)/2$ olduğunu biraz önce kanıtladık. O halde $|BE| = |BC| - |EC| = (c + a)/2$ dir. BDC bir dik üçgen olduğundan Öklit Teoremi gereği $h^2 = |c^2 - a^2|/4$.

Teorem. Bir ikizkenar dikgen yamukta yükseklik tabanların aritmetik ortasıdır.



Kanıt: Köşegenlerin kesişim noktası olan L 'den geçen yüksekliği çizelim. ALD ve BLC ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AE| = |ED| = a/2$ ve $|BF| = |FC| = c/2$ olur. Muhteşem üçlü gereği $|EL| = a/2$ ve $|LF| = c/2$ olduğundan $|EF| = |EL| + |LF| = (a + c)/2$ 'dir. Yani EF uzunluğu a ile c 'nin aritmetik ortasıdır.

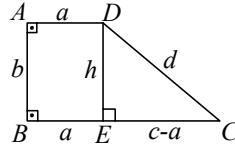
Teorem. Yan kenarları b , tabanları a ve c , köşegenleri e olan bir ikizkenar yamukta her zaman $e^2 = b^2 + ac$ 'dir.



Kanıt: D köşesinden BC 'ye indirilen dikme ayağı E olsun. $|EC| = (c - a)/2$ ve $|BE| = (c + a)/2$ olduğunu kanıtlamıştık. DEC ve DEB üçgenlerinde Pisagor Teoremleri uygulanıp çıkan sonuçlar ortak çözümlerse $e^2 = b^2 + ac$ eşitliği elde edilir.

İşlemleri uzun uzun yapmadım çünkü *Ptolemy Teoremi*'ni öğrendiğimiz zaman bu kanıtı iltifat etmeyeceksiniz. Ama illa ben başka kanıt istiyorum diyorsanız, bu formülü Euler Teoremi'nden de bulabilirsiniz. Aynı çeşitkenar yamuklarda olduğu gibi...

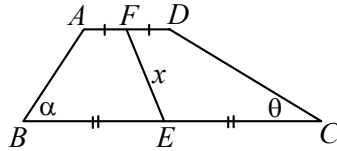
Dik yamuk. Yan kenarlarından biri tabanlarını dik kesen yamuğa *dik yamuk* denir. $m(A) = m(B) = 90^\circ$ ve $m(C) + m(D) = 180^\circ$ dir. Tabanları a ve c , dik yan kenarı b , eğik kenarı d olan yandaki $ABCD$ dik yamuğunun D köşesinden alt tabana bir dikme indirilirse $ABED$ bir dikdörtgen olacağından yamuğun yüksekliği $h = b$ dir.



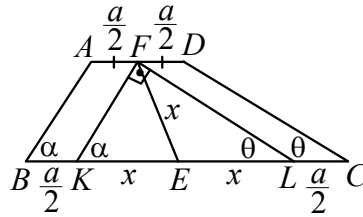
Genelde dik yamuk soruları $[DE]$ yüksekliği çizilerek çözülür. Şekilde $h^2 + (c - a)^2 = d^2$ olduğundan $b^2 + (c - a)^2 = d^2 \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + 2ac$ dir.

Teorem. Bir dik dikgen yamukta yükseklik tabanların geometrik ortasıdır.

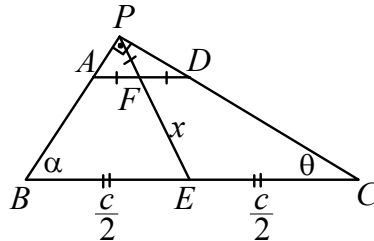
Kanıt: Yan şekilde BC doğrusu üzerindeki bir E noktası için $ADBE$ paralelkenarını oluşturalım. $DB \parallel AE$ olduğundan BD ile AC dik kesişiyorsa AE ile AC de dik kesişir. O halde EAC dik üçgeninde Öklit Teoremi uygulanırsa $h^2 = a \cdot c$ bulunur. Yani h değeri a ile c 'nin geometrik ortasıdır.



Teorem. Taban açıları toplamı 90° olan bir yamukta tabanların orta noktaları arasındaki uzaklık tabanların pozitif farkının yarısı kadardır.



Kanıt: F 'den yan kenarlara paralel olan FK ve FL doğrularını çizelim. KFL dik üçgen, $ABKF$ ve $FLCD$ birer paralelkenar olur. $|BC| = 2x + a = c$ olduğundan $x = \frac{c-a}{2}$ dir.



Kanıt 2: BA ve CD doğrularının kesişimi P olsun. BPC dik üçgen olur. P, F, E noktalarının doğrusal olduğuna dikkat ediniz. Muhteşem üçlü gereği $|PF| + |FE| = |EC|$ olduğundan $\frac{a}{2} + x = \frac{c}{2}$, dolayısıyla $x = \frac{c-a}{2}$ dir.