

# Geometri Notları

Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

## Üçgende Benzerlik-Eşlik

Geometri derslerimizin daha ilkinde her nesneyi veya bağıntıyı tanımlayamayacağımızı ve her önermeyi kanıtlayamayacağımızı söylemiştik. Bunun nedenini de dilimiz döndüğünce açıklamıştık. Tanımsız kabul edilen kavramlar "nokta", "doğru" ve "düzlem" idi, tanımsız kabul edilen bağıntılar da "üzerinde/içeriyor olmak", "arasında olmak" ve "eş olmak" demiştik. Şimdiki dersimiz, tanımsız bağıntıların sonuncusu olan "eşlik" bağıntısıyla ilgili. Tanımı olmadığından sezgisel olarak anlamaya çalışacağız.

**Sezgisel anlamda eşlik.** Elimizde, neye bakarsak bakalım, baktığımız şeyin her zerresini sabit bir oranda büyüten bir büyütecin olduğunu (küçülteç de olabilir) ve onla bir nesneye baktığımızı hayal edelim. Hayal edelim diyorum, çünkü gerçekte böyle bir büyüteç olmadığından tatbiki mümkün değildir. İşte böyle bir büyüteçte görünen şekille asıl şekle **benzer şekiller** diyeceğiz.

Bu benzerlik, yani matematik benzerlik demek istiyorum, günlük hayatta kullandığımız benzerlikle birçok yönden ayrılır. Matematik benzerlikte "andırmak" yetmez. Birbirine çok benzeyen iki kardeş matematikte asla benzer değildir. Hatta tek yumurta ikizi olsalar bile!

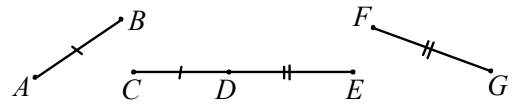
Örneğin, bir insanla onun vesikalık fotoğrafında görünen insan matematikte benzer değildir. Bunun sebebine biraz kafa yorun. Diğer yandan, hani şimdilerde, o an kaydetmekte olduğunuz görüntüyü küçük ekranında gösteren bir dijital kameramız olsaydı, gözümüzün bir ucuyla o insana, diğer ucuyla da ekrandakine baksaydık, işte o zaman matematik benzerliğe daha yaklaşmış olurduk. İşte matematik benzerlik, o kameranın ekranındaki "şey"le gerçek "şey" arasındadır denilebilir. Çok eşersek orada da bir hata bulabiliriz belki ama dediğimiz gibi açıklamalarımız sezgisel manada.

Benzerlik bağıntısını " $\sim$ " simgesiyle göstereceğiz.  $A$  asıl şekil,  $A'$  de büyüteçte görünen şekilse  $A \sim A'$  yazacağız. Kullandığımız büyütecin büyültme sabiti  $k$  ise, yani  $A'$  şekli  $A$  şeklinin  $k$  katıysa,  $k$  değerine de **benzerlik oranı** veya **benzerlik sabiti** diyeceğiz.  $k = 1$  ise ilk şeklin boyutlarının değişmediğini düşünmek pek zor olmasa gerek. İşte  $k = 1$  olunca şekillere **eş şekiller** diyeceğiz. Eş şekiller arasındaki bu ilişki de doğal olarak **eşlik** adını alacak.

**Eşlik bağıntısı ve Eşlik belitleri.** "Eşlik" bağıntısı, deminden beri anlatmak için çırpındığımızdan anlamış olduğunuz üzere tanımsızdır. Eşliği " $\cong$ " simgesiyle gösterilir.  $A$  ile  $A'$  şekilleri eşse  $A \cong A'$  yazacağız.

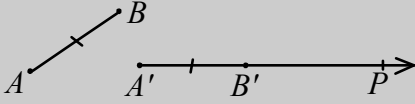
Şimdi  $A'$ 'nin bir doğru parçası olduğunu, daha sonra bir açı daha sonra da bir üçgen olduğunu farzederek eşlik belitlerini (aksiyomlarını) vereceğiz.

**Doğru parçaları için eşlik belitleri.** Aşağıda bu iş için bilimsel açıklama var ama iki doğru parçasının eş olması, kabaca aynı boyda olmaları demektir.  $[AB]$  ve  $[CD]$  gibi iki doğru parçasının tanımsız eşliğini  $[AB] \cong [CD]$  olarak yazacak ve eşlikleri şekilde doğru parçalarının üzerine birer, ikişer eğik çizgiler çizerek göstereceğiz.



Yukardaki şekilde hem  $[AB] \cong [CD]$  hem de  $[DE] \cong [FG]$ 'dir. Yani  $|AB| = |CD|$  ve  $|DE| = |FG|$ 'dir. Hilbert, doğru parçalarının eşliği için şu üç aksiyomu vermiştir:

**E1.**  $A$  ve  $B$  farklı iki nokta ve  $[A'P]$  herhangi bir ışın olsun. Bir ucu  $A'$  noktasında, öteki ucu ışın üzerinde olan ve  $[AB]$ 'ye eş bulunan bir tek  $[A'B']$  vardır.



Anlatılmak istenen şudur:  $|AB| = a$  olsun.  $A'P$  ışını üzerinde  $A'$  noktasına uzaklığı  $a$  olan tek bir nokta vardır. O nokta da şekilde gösterilen  $B'$  noktasıdır.

**E2.** Doğru parçaları için eşlik bağıntısı geçişkendir. Yani  $[AB] \cong [A'B']$  ve  $[A'B'] \cong [A''B'']$  ise  $[AB] \cong [A''B'']$ .

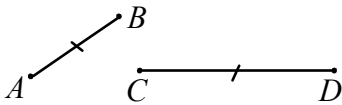
Burada anlatılmak istenen de iki farklı doğru parçasının boyu aynıken, üçüncü bir doğru parçası ilk ikisinden biriyle aynı boydaysa, diğeriyle de aynı boydadır. Evet farkındayım, çok açık ama bunu kanıtlamak şu an için mümkün değil. Aksi-yomlar da zaten böyledir, doğruluğu su götürmez ama kanıtlamak da mümkün değil, dikkat edin kolay değil değil, mümkün değil.

**E3.**  $A-P-B$  ve  $A'-P'-B'$  için  $[AP] \cong [A'P']$  ve  $[PB] \cong [P'B']$  ise  $[AB] \cong [A'B']$  olur.

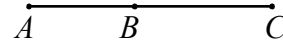


$[AB]$  ve  $[A'B']$  gibi iki farklı doğru parçası düşünün. Her iki doğru parçası üzerinde de birer nokta alın. Her iki doğru parçasında da bu noktanın hem sol köşeye uzaklıkları eşit hem de sağ köşeye uzaklıkları eşitse, o zaman bu doğru parçalarının boyları eşittir demek istiyor.

$[AB]$  ve  $[CD]$  gibi iki doğru parçasının eşliği, Öklid anlamında, bu doğru parçalarının çakışabilmeleridir. Bu da  $[CD]$ 'nin yerinden kaldırılıp(!) bir hareketle  $[AB]$  ile üstüste getirilmesi, yani  $C$ 'nin  $A$ 'ya konması halinde  $D$ 'nin de  $B$ 'ye gelebilmesidir(!). Bu iş başırlamayacağına göre, görev maddesel bir nesne olan pergele yüklenir. Pergelin birer molekül yığını olan uçları,  $[CD]$ 'nin uçlarına konur(!) ve hareketle pergelin bir ucu  $A$ 'ya konup öteki ucun  $B$ 'ye tam gelmesine bakılır. Bu iki işin anlamsızlığı ve olanaksızlığı böylece açıklanınca, eşliği belirtmek üzere bir tek yol kalıyor: Ya  $[AB] \cong [CD]$  yazmakla yetinmek ya da bunu şekille şöyle göstermek:



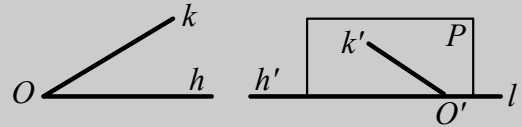
Bu iki doğru parçasından birisi gözünüze daha kısa görünüyorsa da eşlikleri birer çizgiyle belirtilmiş bulunan bu doğru parçalarına eş gözle bakmak zorundayız.



Ancak yukardaki gibi  $A-B-C$  durumunda ( $A, B, C$  noktaları doğrudan doğruya olduğunda)  $[AB] \cong [AB]$  olup,  $[AB] \cong [AC]$  alamayız.

**Açılarda eşlik belitleri.** Hilbert, doğru parçalarının eşliğine ilişkin üç, açılar için ise tek aksi-yom vermiştir. Biz, doğru parçalarıyla açılar arasındaki benzerliği gözönünde tutarak, Hilbert'ten ayrılıp açılar için de üç aksi-yom vereceğiz. Sözünü ettiğimiz benzerliği, bu üç aksi-yomu E1, E2, E3 ile karşılaştırarak daha iyi anlayacaksınız.

Kabaca, açılarda eşlik demek, o açılarda ölçülerinin eşliği demektir. Belitleri bunu düşünerek okursanız daha iyi anlarsınız, gerçi ben gerekli açıklamaları da yaptım. Belitlerde ve açıklamalarda kolaylık olsun diye  $ABC$  açısını  $\hat{ABC}$  yerine  $ABC$  ile gösterdim, affedin.



**E4.**  $hOk$  bir açı ve  $[lP]$  herhangi bir düzlem-ışın ise bir kenarı  $l$  üzerinde öteki kenarı düzlem-ışın üzerinde olan ve  $hOk$  açısına eş bulunan bir tek  $h'O'k'$  açısı vardır.

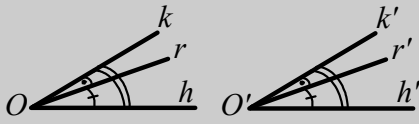
Önce düzlem-ışın nedir onu açıklayayım.

Yarı doğru ile ışın arasındaki fark neydi? Yarı doğrunun başlangıç noktası kendisine dahil değildi ama ışında dahildi. Yarı düzlem ile düzlem-ışın da aynıdır. Yarı düzlemde, düzlemi bir tarafından sınırlayan doğru kendisine dahil değildir ama düzlem-ışında dahildir.

Gelelim belitin ne dediğine: Bir kenarı düzlem-ışını sınırlayan doğru olmak kaydıyla ölçüsü  $\alpha$  derece olan bir açı çizmek isterseniz, düzlem-ışın içinde bunu yapabilecek sadece tek bir ışın vardır diyor. Hani bazen örneğin soruda  $[AB]$  yapayalnız dururken, biz durduk yere  $m(ABC) = 30^\circ$  olmak üzere bir  $BC$  çizelim diyoruz ya, bunun tek olduğunu bilerek, çizme hakkı veriyor bize bu belit.

**E5.** Açılar için eşlik bağıntısı geçişkendir. Yani;  $hOk \cong h'O'k'$  ve  $h'O'k' \cong h''O''k''$  ise  $hOk \cong h''O''k''$ .

Bu belitin ne demek istediği çok açık. Aynı ölçüye sahip iki açı varken, üçüncü bir açının ölçüsü ilk iki açının ölçüsünden birine eşitse diğerine de eşittir diyor, daha ne desin.

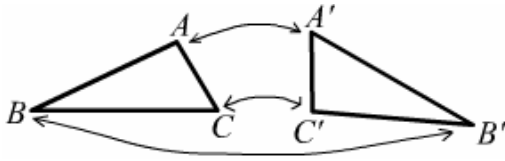


**E6.**  $hOr \cong h'O'r'$  ve  $rOk \cong r'O'k'$  ise  $hOk \cong h'O'k'$ . Bu belit de aynı doğru parçalarının boylarında olduğu gibi açı ölçülerinin de toplanabilmesine yetki veriyor. “İki farklı açı düşünün, ölçüleri  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  olsun. Ama  $\alpha_1 = \alpha_2$  olsun. Şimdi de iki farklı açı daha düşünün, ölçüleri  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  olsun. Burada da  $\theta_1 = \theta_2$  olsun. Ölçüsü  $\alpha_1 + \alpha_2$  olan bir açıyla, ölçüsü  $\theta_1 + \theta_2$  olan bir başka açı eş olur” diyor, sağolsun!

Doğru parçalarının eşliği üzerinde söylediğimiz sözler, açıların eşliği için de geçerli olup  $hOk$  ve  $pOq$  gibi iki açının eşliği ancak  $hOk \cong pOq$  yazmakla ya da şekillerde eşitlikleri bunları belirleyen yaylar üzerinde birer ikişer çizgi çizmekle ifade olunabilir.

Artık, üçgenlerde eşliğe yavaş yavaş geçebiliriz.

**Eşleme yapma.** Önce üçgen eşliğinde çok önem teşkil eden “eşleme yapma” kavramını tanıyalım.



Eğer  $ABC$  ve  $A'B'C'$  gibi iki üçgende  $A$  köşesine  $A'$ ,  $B$  köşesine  $B'$ ,  $C$  köşesine  $C'$  köşesi karşılık getirilirse, bu iki üçgen arasında *bir eşleme kurulmuştur* denir. Bir nevi kıyaslama gibi düşünebilirsiniz. Bu eşleme  $ABC \leftrightarrow A'B'C'$  yazarak gösterilir. Böyle bir eşlemede kenarlar uzunlukları ve açı ölçüleri de eşlenmiş olur. Bu eşlemeler de benzer olarak  $a \leftrightarrow a'$ ,  $b \leftrightarrow b'$ ,  $c \leftrightarrow c'$ ,  $m(A) \leftrightarrow m(A')$ ,  $m(B) \leftrightarrow m(B')$ ,  $m(C) \leftrightarrow m(C')$  şeklinde gösterilirler.

**Üçgenlerde eşlik.** Artık üçgenlerde eşliği tanımlayabiliriz. Dikkat edin, “eşliği” değil, “üçgenlerde eşliği” tanımlıyoruz.

Aralarında  $ABC \leftrightarrow A'B'C'$  gibi bir eşleme kurulmuş olan iki üçgende, karşılıklı kenar uzunlukları ve açı ölçüleri eşitse bu iki üçgene **eş üçgenler** denir. Yani  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$ ,  $m(A) = m(A')$ ,  $m(B) = m(B')$ ,  $m(C) = m(C')$  olmalı. Aslında karşılıklı kenarların ikisi eşit boydayken, bu kenarların belirttiği açı ölçüsü de eşitse, diğer eşitlikler zaten olmak zorundadır, hepsini incelemeye gerek yok-

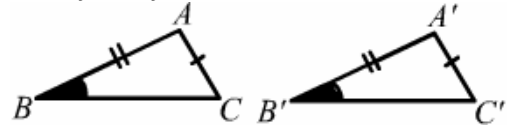
tur. Niye diye sorarsanız kanıtlamayacağımız için, birazdan bir belit vererek bu durumu dokunulmaz hale getireceğiz. Neyse, eğer böyleyse, bu üçgenlerin eşliği  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  yazılarak gösterilir. Ama ben yine, affınıza sığınarak,  $ABC \cong A'B'C'$  diye göstereceğim, siz de anlayacaksınız. Üçgenlerde eşliğin yukarda verdiğimiz tanımı, iki kenar ve bunların belirttiği açıdan bahsettiğinden bu tanıma **K.A.K. (Kenar-Açı-Kenar) tanımı** denir. Şimdi bahsi geçmeyen üçüncü kenara ilişkin bir belite (aksiyoma) ihtiyacımız var. Başrol oynayan açının karşısındaki kenara taban denecek olursa,

**E7.** *Birbirine eş olan iki üçgende karşılıklı taban açıları birbirine eştirler.*

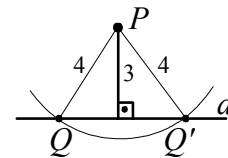
şeklinde bir belit tüm dertlere derman olur. Anlatmak istediği şudur:  $b = b'$ ,  $c = c'$  ve  $m(A) = m(A')$  ise  $m(B) = m(B')$  ve  $m(C) = m(C')$ .

Bu belit ile birlikte benzerlik ve eşlik kavramlarına ilişkin tüm belitleri vermiş olduk. Artık dilediğimiz gibi at oynatabiliriz.

Eşliğin K.A.K. tanımında A harfinin K harflerinin arasına yazılması simetrik görünsün diye değildir. Yani K.K.A. veya A.K.K. deme hakkına sahip değiliz. Peki, uygun koşullar altında böyle eşlikler de var mıdır? Şekil çizelim:



Yukarda resmedilen iki üçgen eştir denilebilir mi? Yani, karşılıklı iki kenar uzunluğuyla, bunların belirttiği değil de diğer karşılıklı açılardan herhangi birinin ölçüsü eşit olsa üçgenler yine eştir diyebilir miyiz? Hem sorunun kendisi çok hoş, hem de cevabı. Olmazsa olmaz bu soruyu ve cevabını lütfen tam anlamıyla idrak edin. Sorunun cevabı tabii ki, “hayır”. Nedeni basit. Anlatayım:



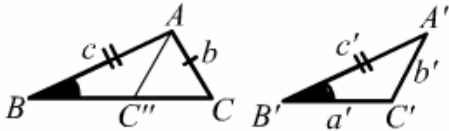
Bir  $d$  doğrusu ve bu doğruya uzaklığı 3 birim olan bir  $P$  noktası düşünün. Doğru üzerinde bu noktaya 4 birim uzaklıkta bulunan kaç nokta vardır?  $P$  noktasını merkez kabul eden 4 birim yarıçaplı bir çember çizilirse, bu çember doğruyu şekilde gösterildiği gibi  $Q$  ve  $Q'$  gibi iki farklı noktada keseceğinden, “Tabii ki 2” denir. Dolayısıyla  $B'C'$  üstünde  $|AC| = |A'C'| = |A'C''|$  olacak şekilde bir  $C''$  noktası daha olabilir. Bu yüzden bu eşlikten her zaman bahsedilemez.

“Her zaman” dedik, çünkü bazen bahsedilebilir. Örneğin, noktanın doğruya uzaklığı 3 birim ise doğru üzerinde bu noktaya uzaklığı 3 birim olan tek bir nokta olabileceğinden yani farklı bir  $C''$  noktası bulunamayacağından bu üçgenler eş olur. Yani o noktadan doğruya istenilen uzunlukta doğru parçası çizildiği zaman, doğruyu ne tür bir açıyla kestiğini bilmemiz lazım. Bunu aşağıdaki teoremden vereceğiz.

Tanımda geçen “türdeş” kelimesinin ne anlama geldiğini bilmeyenler olabilir, hemen bir tanım verelim. İki farklı açının ölçülerinin her ikisi de dar, her ikisi de dik veya her ikisi de genişse, yani aynı tür açıysa, bu açılara **türdeş açı** denir.

**K.K.A.A\* Eşlik Teoremi.** İki üçgen arasında K.K.A. durumu varsa ve ayrıca üçüncü kenarlara ait açılar türdeş ise üçgenler birbirine eştir.

**Kanıt:** K.K.A. durumuna uyan üçgenler  $ABC$  ve  $A'B'C'$  olsunlar.  $b = b'$ ,  $c = c'$ ,  $m(B) = m(B')$  olup, ayrıca  $m(C)$  ile  $m(C')$  türdeş olsun.  $a' \neq a$  kabul edelim, örneğin  $a' < a$  olsun.

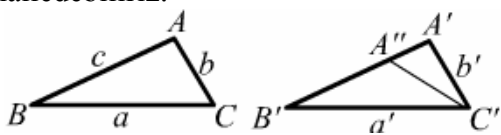


[ $BC$  üzerinde  $|BC''| = |B'C'|$  olmak üzere  $C''$  noktasını alalım. K.A.K. tanımından  $ABC'' \cong A'B'C'$  olur ve bundan dolayı  $|AC'| = |A'C'|$  olup  $AC''C$  üçgeni ikizkenar olur.  $C''$  noktası,  $B$  ve  $C$  noktaları arasında olduğundan  $m(C) = 90^\circ$  ve  $m(C') = 90^\circ$  olamaz. Bu durumda  $AC''C$  üçgeninde  $m(C')$  dış açısı  $m(C)$  iç açısından büyük olur.  $m(C)$  ile  $m(C')$ 'nin türdeş olmadığı gösterilmiş olur ki bu sayıtlıya (kabulümüze) aykırıdır.

$a' > a$  durumunda da benzer bir çelişki çıkar. Dolayısıyla  $a' = a$  olursa bu üçgenler eştir.

**AKA Eşlik Teoremi.** Tabanları ve karşılıklı taban açıları eş olan iki üçgen birbirine eştir.

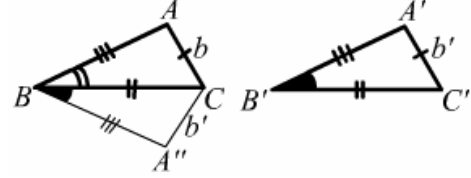
**Kanıt:**  $ABC$  ve  $A'B'C'$  gibi iki üçgende  $a = a'$ ,  $m(B) = m(B')$  ve  $m(C) = m(C')$  olsun. Doğruluğunu göstermek istediğimiz eşitlik  $b = b'$  veya  $c = c'$ . Çünkü bundan sonrasını üçgenin K.A.K. tanımına göre halledebiliriz.



$|B'A'| = c' \neq c$  farzederek  $B'A'$  üstünde  $|B'A''| = c$  olacak şekilde bir  $A''$  noktası alalım. K.A.K. tanımından  $ABC$  ile  $A''B'C'$  üçgenleri eştir. O halde

$m(B'C'A') = m(BCA) = m(B'C'A'')$  bulunur ki;  $A'$  ile  $A''$  noktalarının  $B'C'$  kenarının aynı tarafında olmaları nedeniyle, E1 aksiyomu gereğince  $A'' = A'$  yani  $c = c'$ .

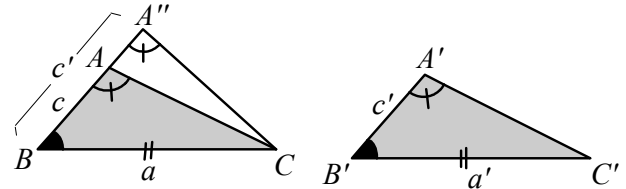
**K.K.K Eşlik Teoremi.** Kenarları karşılıklı eş olan iki üçgen eştir.



**Kanıt:**  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $c = c'$  durumunda herhangi bir karşılıklı açının eşliğini göstermek yetecek. Kalanı yine K.A.K. tanımı halledecek.

$BC$  kenarının  $A$  noktasının bulunmadığı tarafında  $m(CBA'') = m(C'B'A')$  ve  $BA'' = B'A'$  olacak şekilde bir  $A''$  noktası alalım. K.A.K. tanımı gereği  $A''BC$  ile  $A'B'C'$  üçgenleri eştir. O halde  $|A''C| = |A'C'| = b'$  olur. Yine K.A.K. tanımından  $b = b'$  olduğundan  $A''BC$  ile  $ABC$  eş bulunur ki  $b$  ve  $b'$  uzunluğundaki kenarların karşılarındaki açı ölçüleri eşit olmalıdır.

**K.A.A Eşlik Teoremi.** İkişer açısı ve karşılıklı birer kenarı eş olan iki üçgen birbirine eştir.

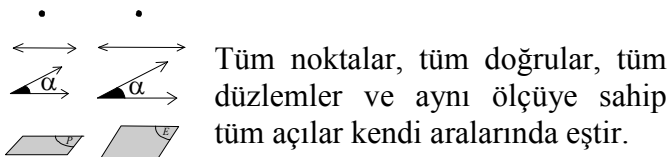
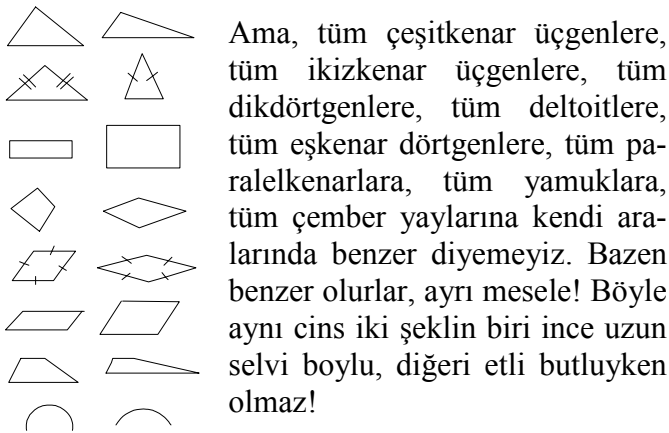
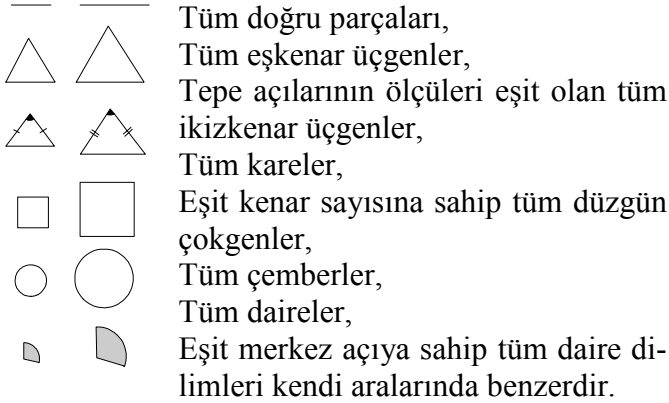


**Kanıt:**  $a = a'$ ,  $m(A) = m(A')$  ve  $m(B) = m(B')$  kabul edebiliriz.  $c' > c$  olduğunu farzederek, [ $BA$  üzerinde  $|BA''| = |B'A'|$  olacak şekilde  $A''$  noktası alalım.  $A''BC$  ile  $A'B'C'$  üçgenleri K.A.K. eşliği gereği eş olduğundan  $m(A'') = m(A')$  olmalıdır. Fakat,  $CAA''$  üçgeninde dış açı teoremi uygulandığında  $m(CAB) = m(CA''A) + m(ACA'') > m(A'') = m(A)$  bulunur ki bu bir çelişkidir. Öyle ise  $A'' = A$  olup  $c = c'$  olur.  $c' < c$  kabul edilseydi de benzer bir çelişki bizi karşılardı. Bu da iki üçgenin eşliğini kanıtlar.

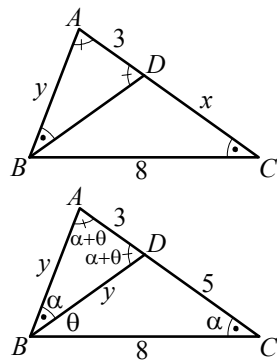
Sadece A.A.A. durumunda ise (A.A. demek de yeter) üçgenlerin eşliğinden değil sadece benzerliğinden bahsedilebilir. Eşlikten bahsedilmek için her halükarda en az bir karşılıklı kenarın eşitliği bulunmalı veya verilmelidir.

Eşlik belitleri ve temel teoremleri bununla birlikte bitmiş oldu. Şimdi daha önce karşılaştığımız ve bundan sonra da karşılaşacağımız geometrik nes-

nelerin hangilerinin herhangi bir çiftinin daima birbirleriyle benzer veya eş olduklarını/olmadıklarını listeleyelim.



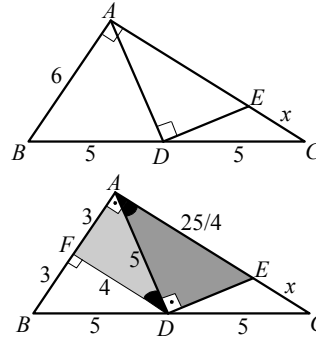
Artık ufak ufak, size daha zevkli gelen soru-çözümlere başlayabiliriz. Lütfen çözülmüş örnek-lere bakmadan, cevaplı testleri okumayın. Gerçi bu satırı okuduğunuzdan da şüpheliyim ama olsun☺



**Örnek.** Yandaki ABC üçgeninde  $m(\angle BAC) = m(\angle ADB)$  ve  $m(\angle ACB) = m(\angle ABD)$ 'dir.  $|AD| = 3$ ,  $|BC| = 8$ ,  $|DC| = x$  ve  $|AB| = y$  ise  $x \cdot y$  çarpımı kaçtır?

**Çözüm:**  $m(\angle ACB) = m(\angle ABD) = \alpha$  ve  $m(\angle CBD) = \theta$  olsun.  $m(\angle BDA) = m(\angle CAB) = \alpha + \theta$  olur. O halde  $|CA| = |CB|$ 'dir. Buradan  $x = 5$  bulunur. Diğer yandan ABD ile ACB

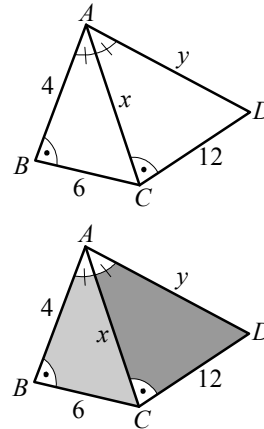
üçgenleri benzer olduğundan  $\frac{8}{y} = \frac{y}{3}$  olur ki buradan  $y = 2\sqrt{6}$ . O halde  $x \cdot y = 10\sqrt{6}$ .



**Örnek.** Yandaki şekilde  $BA \perp AC$  ve  $AD \perp DE$ 'dir.  $|AB| = 6$ ,  $|BD| = |DC| = 5$  olduğuna göre  $|EC| = x$  kaçtır?

**Çözüm:** Muhteşem üçlü gereği  $|AD| = 5$ 'tir.  $[DF]$  orta tabanı çizilirse  $|BF| = |FA| = 3$  ve  $|DF| = 4$  olur.

$AFD$  ile  $EDA$  üçgenlerinin benzerliğinden  $|AE| = \frac{25}{4}$  bulunur ki,  $|AC| = 8$  olduğundan  $|EC| = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}$ 'tür.

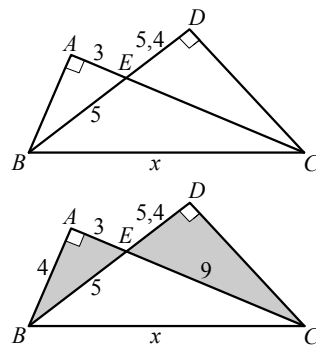


**Örnek.** Yandaki ABCD dörtgeninde AC köşegeni açıortay olup,  $m(\angle ABC) = m(\angle ACD)$  verilmiştir.  $|AB| = 4$ ,  $|BC| = 6$  ve  $|CD| = 12$  ise  $|AC| + |AD| = x + y$  toplamı kaçtır?

**Çözüm:** ABC ile ACD üçgenlerinin ikişer açısı eş olduğundan, bu üçgenler benzerdir.  $\frac{4}{6} = \frac{x}{12}$ 'den  $x = 8$

ve  $\frac{4}{8} = \frac{8}{y}$ 'den de  $y = 16$

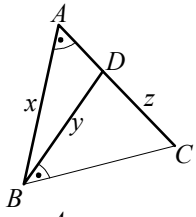
olur. O halde  $x + y = 8 + 16 = 24$  bulunur.



**Örnek.** BAC ve BDC dik üçgenlerinin hipotenüsleri ortaktır.  $|AE| = 3$ ,  $|BE| = 5$  ve  $|ED| = 5.4$  ise  $|BC| = x = ?$

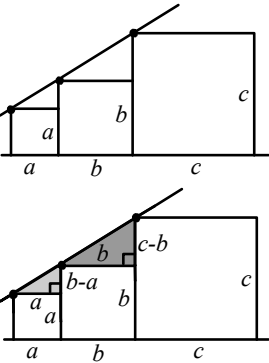
**Çözüm:**  $|AB| = 4$  olduğu yazıldıktan sonra taralı üçgenlerin benzerliğinden  $|EC| = 9$  bulunur. Geriye sadece

BAC dik üçgeninde Pisagor Teoremi'ni uygulamak kalır:  $|BC| = x = \sqrt{160}$ .



**Örnek.** Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $|AB| = |AC|$  ve  $m(\angle BAC) = m(\angle CBD)$  veriliyor.  $|AB| = x$ ,  $|BD| = y$  ve  $|DC| = z$  ise  $x, y, z$  arasında nasıl bir bağıntı vardır?

**Çözüm:**  $BAC$  ve  $DBC$  üçgenlerinde, verilenler dışında,  $C$  açısı da ortak olduğundan bu üçgenler benzerdir. Ayrıca açılar isimlendirilince  $CBD$  üçgeni de ikizkenar çıkıyor. Eşleme kurulusa  $y^2 = x \cdot z$  çıkıyor.

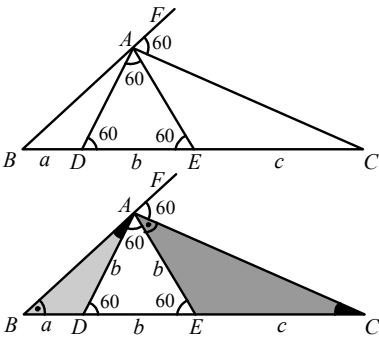


**Teorem.** Yanda verilmiş üç karenin işaretlenmiş üç köşesi doğrusaldır. Karelerin kenarları sırasıyla  $a, b, c$  ise  $b^2 = a \cdot c$  olur.

**Kanıt:** Taranan üçgenler benzer olduğundan eşleme kurulusu,

$$\frac{c-b}{b} = \frac{b-a}{a}$$

orantısı kurulursa  $b^2 = a \cdot c$  bulunur.

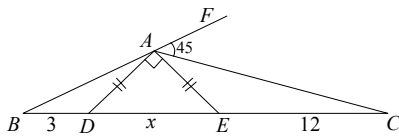


**Teorem.**  $ABC$  üçgeninin içine yandaki gibi  $ADE$  eşkenar üçgeni çizilmiştir.  $m(\angle CAF) = 60^\circ$  ve uzunluklar yanda gösterildiği gibiyse  $b^2 = a \cdot c$ 'dir.

**Kanıt:** Verilere göre  $m(\angle BAD) = m(\angle ACE)$  ve  $m(\angle ABD) = m(\angle CAE)$  olur. O halde taralı üçgenler benzerdir. Eşleme yapılırsa  $b^2 = a \cdot c$  bulunur.

## Alıştırımlar

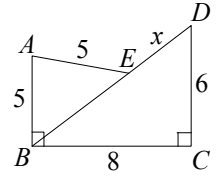
1.  $ABC$  üçgeninde  $m(\angle CAF) = 45^\circ$  olup,  $DAE$  ikizkenar dik üçgendir. Buna göre  $x$  kaçtır?



2.

Yandaki şekilde  $AB \perp BC$  ve  $BC \perp CD$  veriliyor.

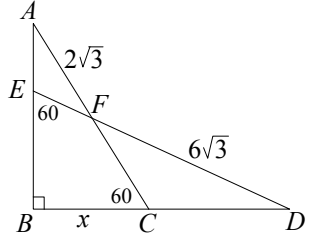
Buna göre  $|ED| = x$  kaçtır?



3.

$ABC$  ve  $EBD$  birer dik üçgen olup,  $m(\angle ACB) = m(\angle DEB) = 60^\circ$  veriliyor.

Buna göre  $|BC| = x$  kaçtır?



**Tales Teoremi.** Verilen iki doğruyu kesen paralel doğrular, bu iki doğru üzerinde orantılı doğru parçaları ayırır.

Yani şekle göre;  $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ .

**Kanıt:**  $ADE$  ile  $ABC$  açıları yöndeş olduğundan eş olup,  $ADE$  ile  $ABC$  üçgenleri ortak bir  $A$  açısına sahip olduklarından A.A. benzerliği gereği  $ADE \sim ABC$  olur. O halde karşılıklı kenarları orantılıdır. Taban açıların karşısındaki kenarları oranlayarak başlayalım:

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} \text{ yani } \frac{|AD|}{|AD| + |DB|} = \frac{|AE|}{|AE| + |EC|} \text{ 'dir.}$$

İçler dışlar çarpımı eşitlenirse,

$$|AD| \cdot |AE| + |AD| \cdot |EC| = |AD| \cdot |AE| + |DB| \cdot |AE|$$

yani  $|AD| \cdot |EC| = |DB| \cdot |AE|$  bulunur.

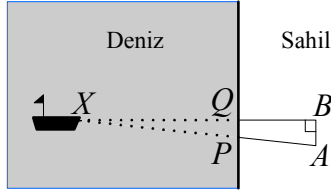
$$\text{Düzenlenirse } \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}.$$

**Tales Teoremi deyip geçmeyin.** Geometrinin en temel teoremlerindendir. Olmazsa olmaz yani. Ne işime yarar da demeyin. Yarar. Belki hayatını kurtarmaz ama hayatını kolaylaştırır. Ne bileyim, vaktinden tasarruf sağlarsın. Hatta eğer marangozsan daha çok kazandırır. Çünkü mümkün olduğunca az fire verirsin. Eğer olur olmadık her şeyi merak eden biriysen, özellikle de uzunlukları, içinde bulunduğun odadan çıkmadan oda dışında olsa bile gözünün gördüğü her iki nesne arasındaki uzaklığı bulabilirsin. Örneğin, sıcak bir yaz günü sahilde güneşlenirken durduk yere denizde gördüğün geminin kıyıya kaç metre uzaklıkta olduğunu merak ettin. Tales Teoremi'ni bilmek ve bir küçük cetvel

(ya da uzunluğunu bildiğin herhangi bir şey, adım da olabilir) buna yeter. Hem de yüzme bilmesen bile.

Nasıl mı?

Yan şekilden takip edin.  $A$  noktasına duruyorsun.  $X$  noktasında da bir gemi demir atmış duruyor. Bulunduğun yerden

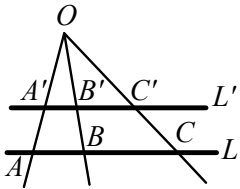


dümdüz gemiye doğru ilerle.  $P$  noktasına gelince, kıyı boyunca, ta ki  $Q$ 'ya kadar git.  $Q$  geminin kıyıya en yakın olduğu yer. Sonra  $B$ 'ye sonra da  $A$ 'ya. Tabi bu arada  $|AP|$ ,  $|PQ|$ ,  $|QB|$  ve  $|BA|$  mesafelerini de ölçtüğünü unutma.  $XQP$  ile  $XBA$  üçgenlerinin benzerliğine dikkat!  $\frac{|XQ|}{|QP|} = \frac{|XQ| + |QB|}{|BA|}$

eşitliğiyle geminin kıyıya en kısa uzaklığı  $|XQ|$  bulunabilir. Hatta  $\frac{|XQ|}{|QB|} = \frac{|XP|}{|PA|}$  ile senin gemiyle

aradaki mesafe de bulunabilir. Aynı metotla odanızdan çıkmadan karşı apartmanın sizin odaya olan uzaklığını da bulabilirsiniz. Ne bileyim, ağaca çıkmadan ağacın boyunu da. Yeter ki iste!

Şimdi de Tales Teoremi'nin tersi diyebileceğimiz iki teorem vereceğiz.



**Teorem.** İki paralel doğrunun biri üzerinde  $A, B, C$  noktaları diğeri üzerinde  $A', B', C'$  noktaları alınıyor.

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \text{ ise } AA', BB',$$

$CC'$  doğruları noktadadır.

**Kanıt:**  $AA'$  ve  $BB'$  doğruları bir  $O$  noktasında kesişiyor olsunlar.

Tales Teoremi gereği  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$ 'dir. Diğer

yandan  $BB'$  ve  $CC'$  doğruları da bir  $O'$  noktasında kesişsinler.

Yine Tales Teoremi gereği  $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|O'B|}{|O'B'|}$ 'dir. O

halde  $\frac{|OB|}{|OB'|} = \frac{|O'B|}{|O'B'|}$  diye  $O' = O$  olmalıdır.

**Teorem.** Dik veya geniş bir açı olan  $XOY$  açısı ile  $OX$  üzerinde  $A$  ve  $A'$  gibi iki nokta,  $OY$  üzerinde de  $B$  ve  $B'$  gibi iki nokta veriliyor. Eğer  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|OA|}{|OA'|}$

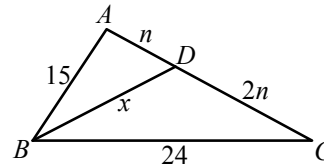
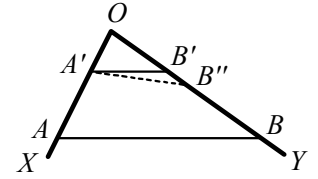
ise  $A'B' \parallel AB$  olur.

**Kanıt:**  $A'$  noktasından  $AB$  ye bir paralel çizelim. Bunun  $OY$ 'yi kestiği nokta  $B''$  olsun. Tales Teoremi gereği

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|OA|}{|OA'|} \text{ olur. Öte yandan hipoteze göre}$$

$$\frac{|AB|}{|A'B''|} = \frac{|OA|}{|OA'|} \text{ imiş. Öyleyse } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AB|}{|A'B''|} \text{ olur}$$

ve buradan  $|A'B''| = |A'B'|$  bulunur. Halbuki  $XOY$  açısı dik veya geniş varsayıldığından  $A'$  noktasından  $OY$ 'ye  $|A'B''|$  uzunluğunda bir tek eğik çizgi çizilebilir. Şu halde  $A'B'$  ile  $A'B''$  çakışmıştır yani  $A'B' \parallel AB$  olmalıdır.

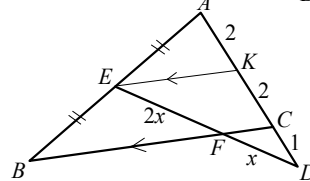
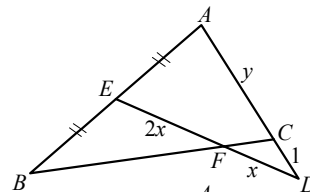
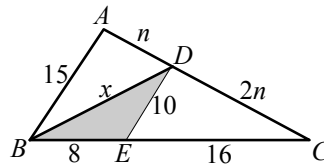


**Örnek.**  $|AB| = 15$  ve  $|BC| = 24$  olan  $ABC$  üçgeninin  $AC$  kenarı üzerinde  $|CD| = 2 \cdot |DA|$  olacak şekilde bir  $D$  noktası alınıyor.

$|BD| = x$  kaç farklı tamsayı değeri alabilir?

**Çözüm:**  $D$ 'den  $AB$ 'ye paralel çizilen doğru  $BC$ 'yi

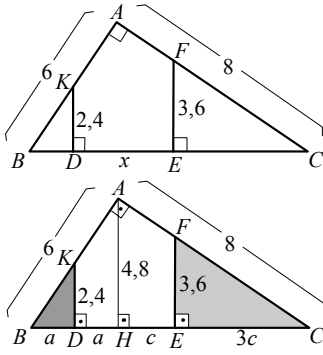
$E$ 'de kessin.  $|DE| = 10$ ,  $|EC| = 16$  ve  $|BE| = 8$  olur.  $BED$ 'de üçgen eşitsizliğinden  $2 < x < 18$  bulunur ki  $x$ , 15 farklı tamsayı değeri alabilir.



2. Sonuçta  $|AC| = y = 4$ .

**Örnek.** Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $E$  orta nokta olup,  $E, F, D$  noktaları doğrusaldır.  $|EF| = 2 \cdot |FD|$  ve  $|CD| = 1$  ise  $|AC| = y$  kaçtır?

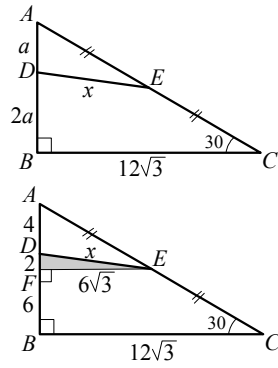
**Çözüm:** Derhal  $[EK]$  orta tabanını çiziyoruz.  $EDK$  üçgeninde Tales Teoremi'nden  $|CK| = 2$  oluyor, o halde  $|AK| =$



**Örnek.** Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $BA \perp AC$ ,  $KD \perp BC$  ve  $FE \perp BC$  verilmiştir. Uzunluklar yanda gösterildiği gibiyse  $|DE| = x$  kaçtır?

**Çözüm:** Hipotenüse ait  $[AH]$  yüksekliğini çizelim.  $6 \cdot 8 = 10 \cdot |AH|$  eşitliğinden  $|AH| = 4,8$

olur. O halde  $AHB$  dik üçgeninde  $[KD]$  orta tabandır.  $AHC$  üçgeninde de Tales Teoremi gereği  $|EC| = 3 \cdot |HE|$  olur. Taralı üçgenler büyük üçgenle benzer olduğundan  $a = 1,8$  ve  $c = 1,6$  bulunur. O halde  $x = a + c = 3,4$  olur.



**Örnek.** Yandaki  $ABC$  dik üçgeninde  $m(\angle ACB) = 30^\circ$  ve  $|BC| = 12\sqrt{3}$  veriliyor.  $E$  noktası hipotenüsün orta noktası ve  $|BD| = 2 \cdot |DA|$  ise  $|DE| = x$  kaçtır?

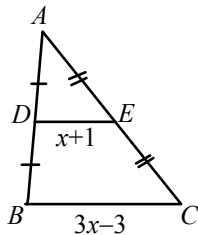
**Çözüm:** Derhal  $[EF]$  orta tabanını çiziyoruz.  $|AB| = 12$  olduğundan  $|DF| = 2$  ve  $|FE| = 6\sqrt{3}$  olur. Geri-

ye sadece Pisagor Teoremi'ni uygulamak kalıyor.  $|DE| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$ .

### Alıştırırmalar

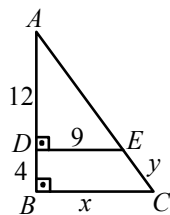
1.

Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $D$  ve  $E$  orta noktalar ise  $x$  kaçtır?



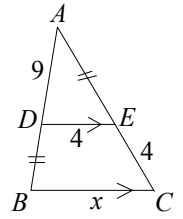
2.

Yandaki üçgende  $AB \perp BC$  ve  $AD \perp DE$  veriliyor. Buna göre  $x + y$  toplamı kaçtır?



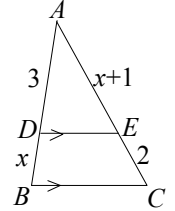
3.

Yandaki üçgende  $DE \parallel BC$  olup,  $|AE| = |DB|$  veriliyor. Buna göre  $x$  kaçtır?



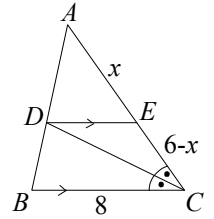
4.

Yandaki üçgende  $DE \parallel BC$  ise  $x$  kaçtır?



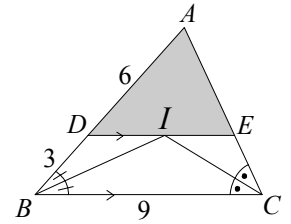
5.

Yandaki üçgende  $DE \parallel BC$  olup,  $CD$  açıortaydır.  $|BC| = 8$ ,  $|AE| = x$  ve  $|EC| = 6 - x$  ise  $|DE|$  kaçtır?



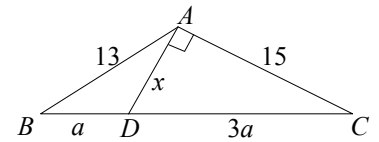
6.

Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $BI$  ve  $CI$  iç açıortaydır.  $DE \parallel BC$  ise taralı  $ADE$  üçgeninin çevresi kaçtır?

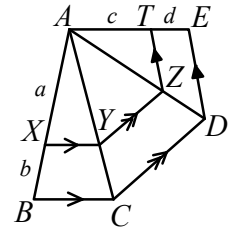


7.

$ABC$  üçgeninde  $DA \perp AC$  veriliyor.  $|CD| = 3 \cdot |BD|$  ise  $|AD| = x$  kaçtır?



**Teorem.** Yandaki şekilde  $XY \parallel BC$ ,  $YZ \parallel CD$  ve  $ZT \parallel DE$  veriliyor. O halde  $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AT|}{|TE|}$  yani  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  dir.



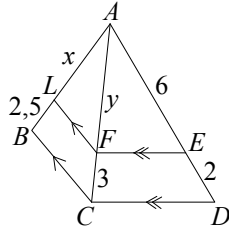
**Kanıt:** Tales Teoremi gereği,

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AY|}{|YC|} = \frac{|AZ|}{|ZD|} = \frac{|AT|}{|TE|}.$$

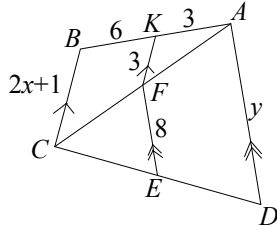


### Alıştırımlar

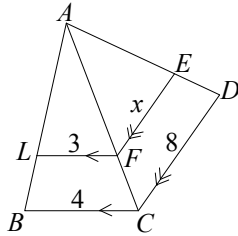
1. Yandaki  $ABCD$  dörtgeninde  $LF \parallel BC$  ve  $FE \parallel CD$  veriliyor. Buna göre  $x + y$  toplamı kaçtır?



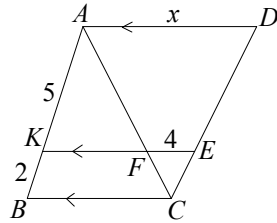
2. Yandaki  $ABCD$  dörtgeninde  $KF \parallel BC$  ve  $FE \parallel AD$  dir. Buna göre  $x + y$  toplamı kaçtır?



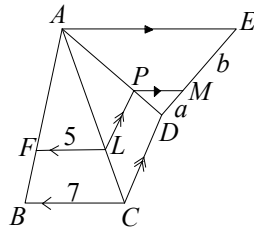
3. Yandaki  $ABCD$  dörtgeninde  $LF \parallel BC$  ve  $EF \parallel CD$  veriliyor. Buna göre  $x$  kaçtır?



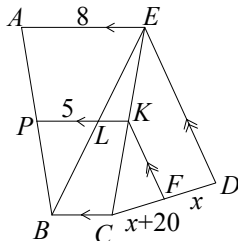
4. Yandaki  $ABCD$  dörtgeninde  $AD \parallel KE \parallel BC$  veriliyor. Buna göre  $x$  kaçtır?



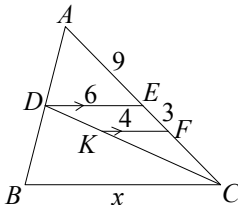
5. Yandaki şekilde  $FL \parallel BC$ ,  $LP \parallel CD$  ve  $PK \parallel AE$  veriliyor. Buna göre  $\frac{a}{b}$  kaçtır?



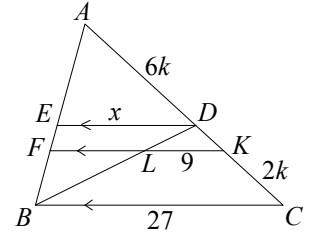
6. Yandaki şekilde  $BC \parallel PK \parallel AE$  ve  $KF \parallel ED$  veriliyor. Buna göre  $x$  kaçtır?



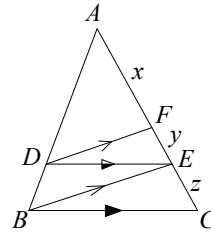
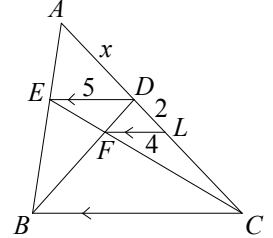
7. Yandaki üçgende  $DE \parallel KF \parallel BC$  dir. Buna göre  $x$  kaçtır?



8. Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $ED \parallel FK \parallel BC$  veriliyor. Buna göre  $|ED| = x = ?$



9.  $ABC$  üçgeninde  $ED \parallel FL$  dir. Buna göre  $|AD| = x$  kaçtır?



**Teorem.** Yandaki şekil için  $DE \parallel BC$  ve  $DF \parallel BE$  ise

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{z} \text{ . Aynı zamanda}$$

$$(x+y)^2 = x \cdot (x+y+z).$$

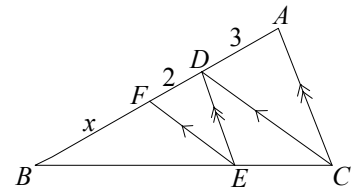
**Kanıt:** Tales Teoremi'nden

$$\frac{x}{y} = \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{x+y}{z}$$

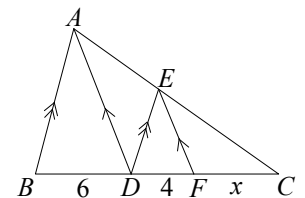
olduğundan kanıt biter. Diğer eşitliğe gelince;  $x \cdot y + y^2 = x \cdot z$  olduğundan eşitliğin her iki tarafına  $x^2 + x \cdot y$  eklenir ve düzenlenirse  $(x+y)^2 = x \cdot (x+y+z)$  elde edilir.

### Alıştırımlar

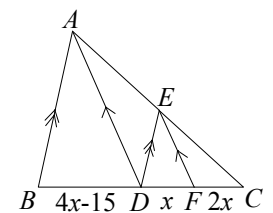
1. Yandaki şekilde  $AC \parallel DE$  ve  $DC \parallel FE$  veriliyor. Buna göre  $x$  kaçtır?



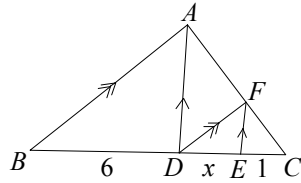
2. Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $AB \parallel DE$  ve  $AD \parallel EF$  dir. Buna göre  $x$  kaçtır?



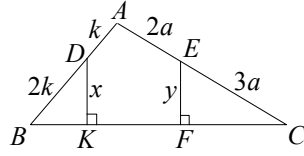
3. Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $AB \parallel DE$  ve  $AD \parallel FE$  veriliyor. Buna göre  $x$  kaçtır?



4. Şekildeki oklar paralelliği simgelemekte olduğuna göre  $x$  kaçtır?



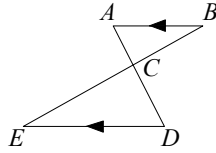
5.  $ABC$  üçgeninde  $|BD| = 2 \cdot |DA|$  ve  $|AE| = |EC| = \frac{2}{3}$



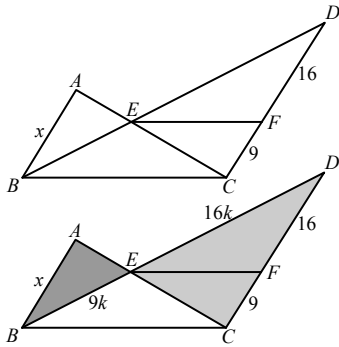
ise  $\frac{x}{y}$  oranı kaçtır?

**Teorem.** Yandaki şekil için  $AB \parallel ED$  ise

$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|CE|}.$$



**Kanıt:**  $ACB$  ile  $DCE$  ters açılar olduğundan eşitir.  $ABC$  ile  $DEC$  ve  $BAD$  ile  $EDA$  açı çiftleri de birer iç-ters açı olduklarından eşitirler. O halde A.A. benzerliği gereği  $ABC \sim DEC$  olur. Eş şekillerin karşılıklı kenarları orantılı olacağından eşleme kurularsa kanıt biter. Bu şekilden ileride kelebek diye bahsedeceğiz.



**Örnek.** Yanda verilen şekilde  $BA \parallel CD$  ve  $EF \parallel BC$ 'dir.  $|CF| = 9$  ve  $|FD| = 16$  ise  $|BA| = x$  kaçtır?

**Çözüm:**  $BCD$  üçgeninde Tales Teoremi'nden

$$\frac{|DE|}{|EB|} = \frac{16}{9}$$

olmalıdır.  $|DE| = 16k$  ise  $|BE| = 9k$  olur. Şimdi de kelebekte benzerlik kuracağız:

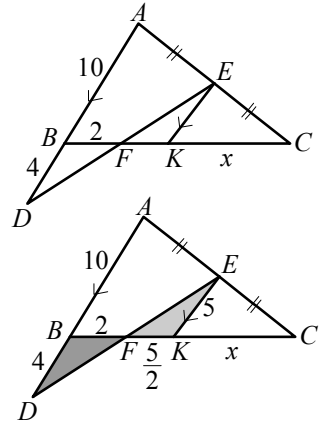
$$\frac{x}{25} = \frac{9}{16} \text{ eşitliğinden } x = \frac{225}{16}.$$

**Örnek.** Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $AB \parallel EK$  olup,  $E$  orta noktadır.  $|AB| = 10$ ,  $|BD| = 4$  ve  $|FB| = 2$  ise  $|KC| = x$  kaçtır?

**Çözüm:**  $ABC$  üçgeninde  $[EK]$  orta taban olduğundan  $|EK| = 5$ . Diğer yandan taralı kelebekte benzerlik oranı  $4 : 5$  olduğundan

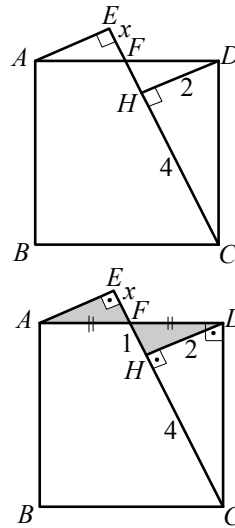
$$|FK| = \frac{5}{2} \text{ 'dir.}$$

$$\text{O halde } |KC| = |BK| = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}.$$



**Örnek.** Yandaki şekilde  $ABCD$  bir kare olup,  $DH \perp EC$  ve  $AE \perp EC$ 'dir.  $|DH| = 2$  ve  $|HC| = 4$  olduğuna göre  $|EF| = x$  kaçtır?

**Çözüm:** Öklid Teoremi'nden  $|FH| = 1$  bulunur.  $|FD| = \sqrt{5}$  ve  $|DC| = 2\sqrt{5}$  olduğundan  $F$ 'nin karenin kenarının orta noktası olduğunu anlarız. O halde kelebekte taralı üçgenler eşitir, dolayısıyla  $|EF| = |FH| = 1$ .

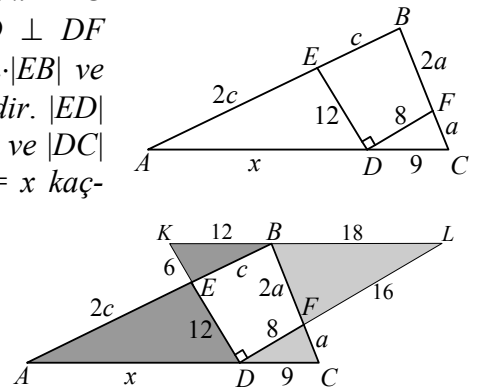


**Örnek.** Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $ED \perp DF$  olup,  $|AE| = 2 \cdot |EB|$  ve  $|BF| = 2 \cdot |FC|$ 'dir.  $|ED| = 12$ ,  $|DF| = 8$  ve  $|DC| = 9$  ise  $|AD| = x$  kaçtır?

**Çözüm:**

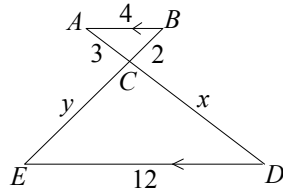
$B$ 'den geçen  $KL$  doğrusunu çizerek şekildeki ta-

ralı kelebekleri oluşturalım. Sağdaki kelebekten  $|FL| = 16$  ve  $|BL| = 18$  bulunur. Soldaki kelebekten de  $|KE| = 6$ .  $KDL$  dik üçgeninde Pisagor Teoremi'nden  $|KL| = 30$ , dolayısıyla  $|KB| = 12$  olmalıdır. Soldaki kelebekte benzerlik oranından  $x = 24$  bulunur.

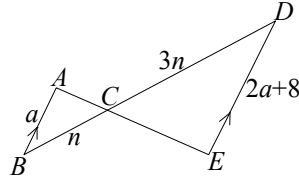


## Aıştırmlar

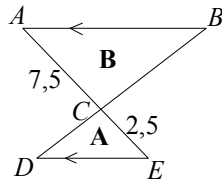
1. Yandaki şekilde  $AB \parallel ED$  ise  $x + y$  toplamı kaçtır?



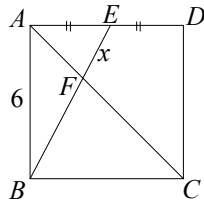
2. Yandaki şekilde  $BA \parallel ED$  ise  $a$  kaçtır?



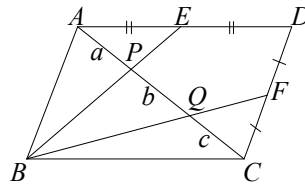
3. Yandaki şekilde  $AB \parallel DE$  ise  $\frac{A}{B}$  oranı kaçtır?



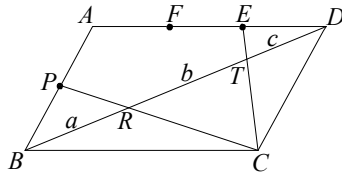
4. ABCD kare ve E orta nokta ise  $|EF| = x$  kaçtır?



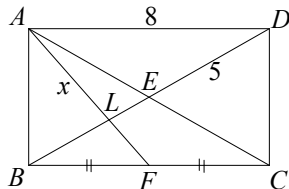
5. ABCD paralelkenar ve E ile F bulundukların kenarların orta noktalarıdır. Buna göre  $a : b : c = ?$



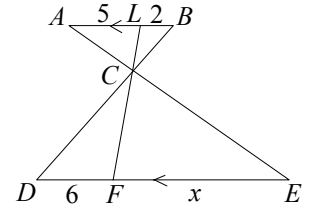
6. ABCD paralelkenar olup,  $|AP| = |PB|$  ve  $|AE| = 2 \cdot |ED|$  dir. Buna göre  $\frac{a+b}{c}$  oranı kaçtır?



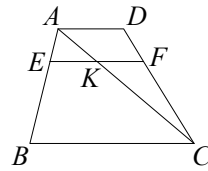
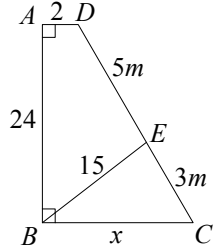
7. ABCD dikdörtgen olup, F orta noktadır. Buna göre  $|AL| = x$  kaçtır?



8. Yandaki şekilde  $AB \parallel DE$  ise  $x$  kaçtır?



9. ABCD dik yamuğunda  $\frac{|DE|}{|EC|} = \frac{5}{3}$  ise  $|BC| = x$  kaçtır?



**Teorem.** Yandaki şekilde  $AD \parallel EF \parallel BC$  ve  $|EK| = |KF|$  ise  $|EK| = \frac{|AD| \cdot |BC|}{|AD| + |BC|}$ .

**Kanıt:** BAC üçgeninde Ta-les

Teoremi'nden  $\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|EK|}{|BC|}$  ve ADC üçgeninde

Tales Teoremi'nden  $\frac{|CK|}{|AC|} = \frac{|KF|}{|AD|}$  bulunur. Bu iki eşitlik birlikte çözülürse istenilen eşitlik elde edilir. Burada K noktası yamuğun köşegenlerinin kesim noktasıdır yani B, K, D noktaları doğrudur. Bunun kanıtını ise okura bırakıyoruz.

**Teorem.** Yandaki şekilde  $AB \parallel FE \parallel DC$  ise

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Aynı zamanda

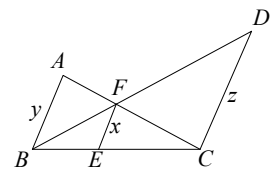
$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{y}{z}$$

**Kanıt:** Kelebek'ten  $\frac{|CF|}{|FA|} = \frac{z}{y}$  dir. O halde

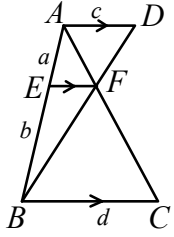
$\frac{|CF|}{|CA|} = \frac{z}{z+y}$ . Aynı oran CAB üçgeninde Tales

Teoremi'nden  $\frac{x}{x+y}$  olduğundan bu iki orandan

$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  eşitliği kanıtlanmış olur. Diğer yandan



kelebekten  $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{y}{z}$  olduğundan ve Tales Teoremi'nden  $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|BE|}{|EC|}$  olduğundan  $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{y}{z}$ .



**Teorem.** Yandaki şekilde  $AC \parallel EF \parallel BC$  ve uzunluklar gösterildiği gibiyse  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

**Kanıt:** Kelebekten dolayı  $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{c}{d}$  'dir. Tales Teoremi ge-

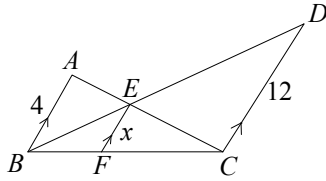
reği de  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  olur.

### Alıştırmalar

1.

Yandaki şekilde  $AB \parallel EF \parallel CD$  veriliyor.

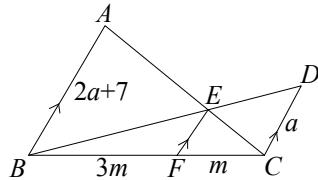
Buna göre  $x$  kaçtır?



2.

Yandaki şekilde  $AB \parallel EF \parallel CD$  veriliyor.

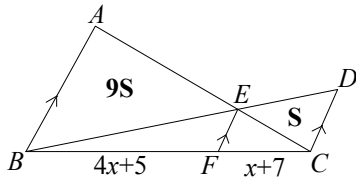
Buna göre  $a$  kaçtır?



3.

Yandaki şekilde  $\text{Alan}(ABE) = 9 \cdot \text{Alan}(EDC)$  veriliyor.

Buna göre  $x$  kaçtır?

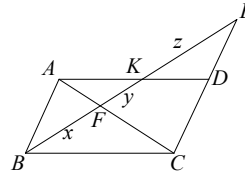
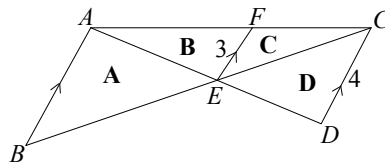


4.

Yandaki şekilde  $AB \parallel EF \parallel CD$

ise  $\frac{A+C}{B+D}$  oranı

kaçtır?

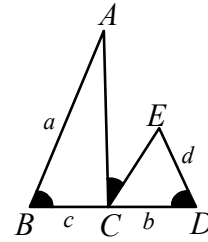


**Teorem.** Yandaki şekilde  $ABCD$  bir paralelkenar ise  $x^2 = y \cdot (y + z)$ . Aynı zamanda  $|AB| \cdot |BC| = |AK| \cdot |CE|$ .

**Kanıt:**  $AKF \sim CFB$  oldu-

ğundan  $\frac{|AK|}{|BC|} = \frac{y}{x}$ . O halde  $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{y}{x-y}$ . Aynı zamanda bu oran  $AKB \sim EKD$  benzerliğinden  $\frac{x+y}{z}$  olduğundan bu iki oran eşitlenirse  $x^2 = y \cdot (y + z)$  eşitliği bulunur. Diğer eşitliği de  $F$  merkezli kelebeklerden çıkan  $\frac{|AK|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|AB|}{|CE|}$  orantısından elde edebiliriz.

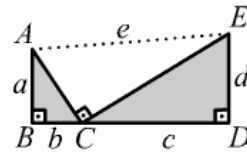
Aynı zamanda bu şekilde  $\frac{1}{|BF|} = \frac{1}{|BK|} + \frac{1}{|BE|}$  bağıntısı da vardır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.



**Teorem.** Yandaki şekilde  $B, C, D$  noktaları doğrusal olup  $m(\angle ABD) = m(\angle ACE) = m(\angle BDE)$  verilmiştir. Uzunluklar gösterildiği gibiyse  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

**Kanıt:**  $m(\angle ACD) = m(\angle ABD) + m(\angle CAB)$  olduğundan  $m(\angle BAC) = m(\angle ECD)$  olur. O halde bu iki üçgen benzerdir. Eşleme kurulursa  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  eşitliği kanıtlanmış olur.

Bu teoremin çok daha özel bir durumu aşağıda verilmiştir. Çok çok önemli bir teorem, benzerlik sorularının içinde sıkça karşılaşırsınız. Hızlı olmak açısından ezbere bilmeniz de fayda var.

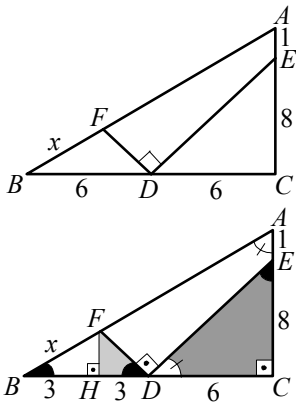


**Teorem.** Yandaki şekilde  $ABC, EDC$  ve  $ACE$  birer dik üçgen ise  $|AB| \cdot |ED| = |BC| \cdot |CD|$  yani  $a \cdot d = b \cdot c$  'dir.

Ayrıca  $e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .

**Kanıt:**  $ABC$  ile  $CDE$  üçgenleri benzerdir (AA Benzerliği). Orantı kurulursa istenilen bulunur. Ayrıca  $ACE$  üçgeninde Pisagor Teoremi'nden  $e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .

Ek bilgi olarak şunu verelim:  $a \cdot d = b \cdot c$  eşitliğinin sağlanması için verilen üç dik açının eş olması şart ama dik olması şart değildir. Bunu daha önce bulmuştuk hatırlarsanız.



**Örnek.** Yandaki üçgen-  
de  $AC \perp BC$  ve  $FD \perp$   
 $DE'$  dir.  $|AE| = 1$ ,  $|EC| =$   
 $8$ ,  $|CD| = |DB| = 6$  ise  
 $|BF| = x$  kaçtır?

**Çözüm:**  $DCE$  üçgeni 6-  
8-10,  $ACB$  üçgeni de 9-  
12-15 üçgeni oldukla-  
rından benzerdirler.

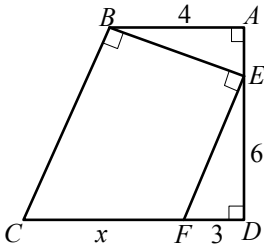
O halde

$m(\angle DEC) = m(\angle ABC)$   
olur. Diğer yandan

$$m(\angle DEC) = m(\angle FDH)$$

olduğundan  $BFD$  ikizkenar üçgendir.  $F'$  den  $BC$ 'ye  
inilen dikme ayağına  $H$  diyelim.  $|BH| = |HD| = 3$   
olur. Tales Teoremi'nden  $\frac{|BF|}{|FA|}$ , nın  $\frac{1}{3}$  yani  $|FA| =$

$3x$  olduğunu biliyoruz.  $4x = 15$ 'ten  $x = \frac{15}{4}$  olarak  
bulunur.



**Örnek.** Yandaki  $ABCD$   
dik yamuğunda  $CB \perp BE$   
ve  $BE \perp EF$  veriliyor.  $|BA|$   
 $= 4$ ,  $|ED| = 6$ ,  $|FD| = 3$  ise  
 $|CF| = x$  kaçtır?

**Çözüm:**  $F$ 'den  $BC$ 'ye in-  
dirilen dikme ayağı  $K$  ol-  
sun.  $EBKF$  bir dikdörtgen  
olur. Diğer yandan  $BAE$   
ile  $EDF$  üçgenlerinin ben-  
zerliğinden  $|AE| = 2$  bulu-  
nur. O halde

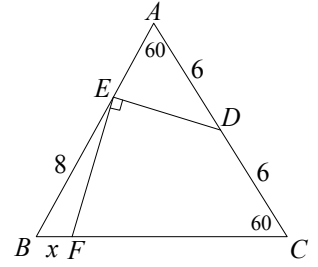
$$|KF| = |BE| = 2\sqrt{5}$$

olur.  $KCF$  üçgeni diğer ta-  
ralı üçgenlerle benzer olduğundan  $|KC| = \sqrt{5}$  ve  
 $|CF| = x = 5$  olur.

2.

$ABC$  eşkenar üçgen  
olup,  $DE \perp EF$  verili-  
yor.

Buna göre  $|BF| = x$   
kaçtır?



**Teorem.** Dik kenarları  $a$  ve  
 $b$  olan bir dik üçgenin içine  
 $x$  kenarlı bir kare yandaki  
gibi yerleştirilirse

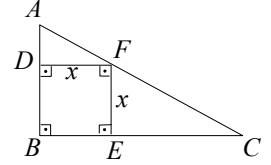
$$x = \frac{a \cdot b}{a + b} \text{ veya } \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

**Kanıt:**  $ADF$  ile  $ABC$  üçgenleri benzer olduğun-  
dan

$$\frac{|AD|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Değerler yerine yazılırsa;

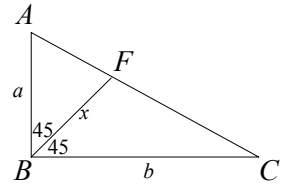
$$\frac{a - x}{x} = \frac{a}{b} \text{ diye } x = \frac{a \cdot b}{a + b}.$$



**Uyarı.** Dik üçgende, dik  
açıya ait iç açıortayın bo-  
yunu bulmanın çoğu za-  
man sevimsiz rakamlar  
içerdiğini biliriz. Problem

kolaydır ama o işlemler yok mu? Çözmesem daha  
iyi dedirtirir. İşte yukarda kanıtladığımız bu eşit-  
lik sayesinde o sevimsiz eşitliklerden kurtulmuş  
oluruz. Dik açığa ait iç açıortayın boyu, bu kare-  
nin köşegen uzunluğuna eşittir. Yani;

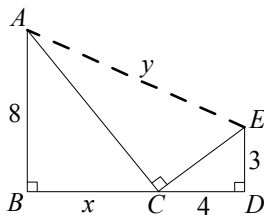
$$x = \frac{a \cdot b}{a + b} \sqrt{2}.$$



### Alıştırımlar

1.

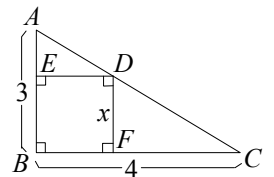
Yandaki  $ABDE$  dik yamu-  
ğunda  $AC \perp CE$  ise  
 $x + y$  toplamı kaçtır?

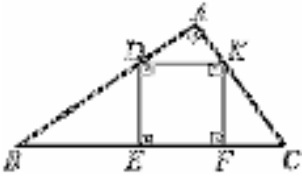


1.

$ABC$  dik üçgenin içine  
yandaki gibi  $EBFD$  karesi  
çizilmiştir.

Bu karenin bir kenar  
uzunluğu olan  $x$  kaçtır?

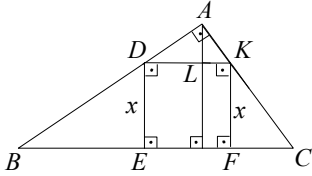




**Teorem.** Hipotenüsü  $c$ , hipotenüze ait yüksekliği  $h$  olan bir dik üçgenin içine bir kenarı  $x$  olan bir kare şeklindeki gibi

$$\text{yerleştirilirse, } x = \frac{c \cdot h}{c + h}.$$

$$\text{Başka bir ifadeyle: } \frac{1}{x} = \frac{1}{c} + \frac{1}{h}.$$



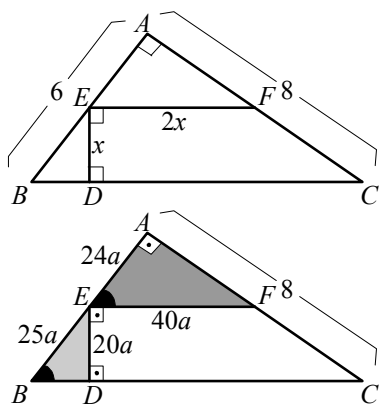
**Kanıt:** DAK ile BAC üçgenleri benzerdir. Burada kenarlar arasında yapılan bir eşleme sonuç vermediğinden, hipotenüsler ve hipotenüse inilen dikmeler

arasında bir eşleme yapacağız. DAK üçgeninin hipotenüsüne inen yüksekliğinin boyu  $(h - x)$ 'dir.

$$\text{Dolayısıyla } \frac{x}{c} = \frac{h - x}{h} \text{ eşitliğinden kanıt bitmiş}$$

olur. Bu kural sadece dik üçgene özgü değildir. Her üçgende benzer bir uygulama yapılabilir. Alanı ve bir kenar uzunluğu verilen herhangi bir üçgende uzunluğu bilinen kenar üzerine oturtturulan en büyük karenin bir kenar uzunluğu da benzer şekilde siz bulunuz.

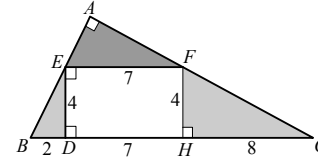
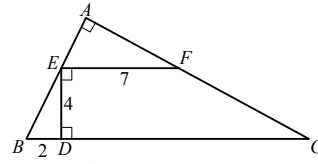
Dik üçgen içine sadece kare değil, dikdörtgen de yerleştirilebilir. Dikdörtgen dışında kalan üç dik üçgen hem kendileriyle hem de en büyük dik üçgenle benzer olur. Buna özgü bazı problemler çözüp, alıştırmalara geçeceğiz.



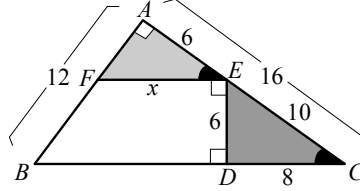
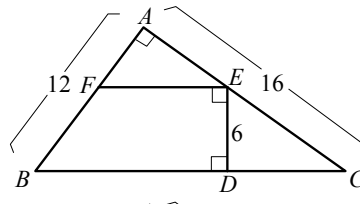
**Örnek.** Yandaki üçgende  $BA \perp AC$  ve  $DE \perp EF$  verilmiştir.  $|BA| = 6$ ,  $|AC| = 8$ ,  $|EF| = 2 \cdot |ED| = 2x$  ise  $x$  kaçtır?

**Çözüm:** AEF, ABC ve DBE üçgenlerinin benzerliğine dikkat edin. Her biri  $3k-4k-5k$

üçgenidir. Kolaylık açısından  $x = 20a$  olsun. O zaman  $|BE| = 25a$  ve  $|EA| = 24a$  olur.  $|BA| = 49a = 6$  eşitliğinden  $a = \frac{6}{49}$  ve  $x = 20a = \frac{120}{49}$  olur.



Taralı üçgenler benzer olduğundan  $|HC| = 8$  bulunur, o halde  $|DC| = 7 + 8 = 15$  olur.



**Örnek.** Yandaki ABC üçgeninde  $BA \perp AC$  ve  $DE \perp EF$ 'dir.  $|DE| = 6$ ,  $|BA| = 12$  ve  $|AC| = 16$  ise AFE üçgeninin çevresi kaçtır?

**Çözüm:** CDE ile CAB üçgenleri benzerdir. O halde CDE bir 6-8-10 üçgenidir. Buradan

$|AE| = 6$  çıkar. AFE üçgeni de ABC üçgenine benzerdir. Unutmayınız ki; çevreler oranı benzerlik oranındadır. O halde benzerlik oranı  $\frac{6}{16}$ 'dır.

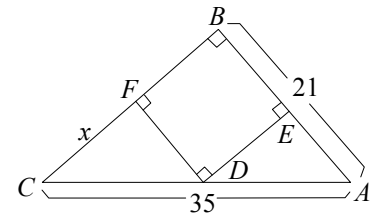
$$\frac{6}{16} = \frac{Ç(AFE)}{48}$$

olduğundan Çevre(AFE) = 18 bulunur.

## Alıştırmalar

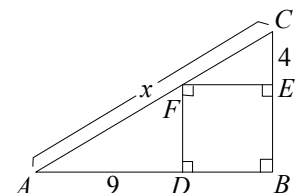
**1.** ABC dik üçgen ve BEDF karedir.

Buna göre  $|CF| = x$  kaçtır?



**2.** ABC dik üçgen ve EBDF karedir.

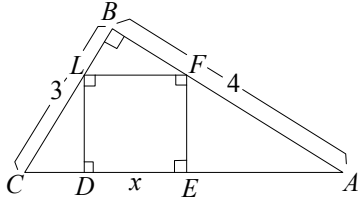
Buna göre  $|AC| = x$  kaçtır?



3.

$ABC$  dik üçgeninin içine yandaki gibi  $EFLD$  karesi çizilmiştir.

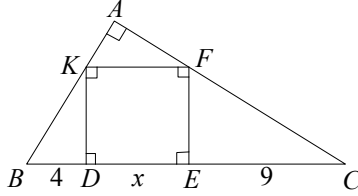
Buna göre  $|DE| = x$  kaçtır?



4.

$CAB$  dik üçgen ve  $DEFK$  bir karedir.

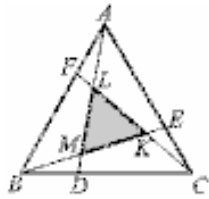
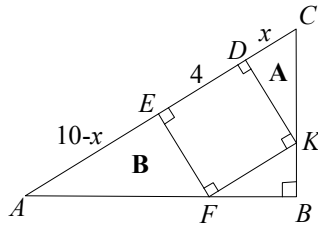
Buna göre  $x$  kaçtır?



5.

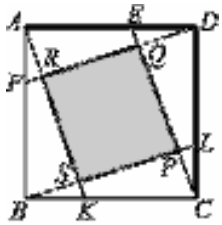
$ABC$  dik üçgen ve  $DEFK$  karedir.

Buna göre  $\frac{A}{B}$  kaçtır?



**Teorem.** Bir  $ABC$  eşkenar üçgeninde  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  kesenleri için  $|AF| = |BD| = |EC|$  ise ortada oluşan üçgen eşkenardır.

**Kanıt:**  $ABD$  ile  $BCE$  üçgenleri eşittir. O halde  $m(\angle BAD) = m(\angle CBE)$  olduğundan  $m(\angle ABM) = m(\angle BCK)$ 'dır. Dolayısıyla  $m(\angle LKM) = 60^\circ$  bulunur. Simetrik şekilde diğer benzerliklerden de faydalanarak  $m(\angle KLM) = 60^\circ$  bulunur. Dolayısıyla  $KLM$  üçgeni eşkenardır.



**Teorem.** Yandaki  $ABCD$  karesinde  $|AF| = |BK| = |CL| = |DE|$  ise ortadaki dörtgen bir karedir.

**Kanıt:**  $ABK$  ile  $BCL$  üçgenlerinin eşliğinden  $m(\angle BAK) = m(\angle CBL)$  bulunur. O halde  $m(\angle ABS) = m(\angle BCP)$  olur ki bu da  $m(\angle SPQ) = 90^\circ$  demek. Simetrik şekilde diğer benzerlikler kurularak  $PQRS$  dörtgeninin bir kare olduğu kanıtlanır.

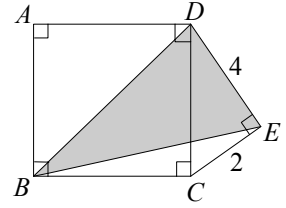
Bu durum düzgün çokgenler için genellenebilir. Yani, dıştaki düzgün  $n$ -gense, içte oluşan şekil de düzgün  $n$ -gen olur.

## Alıştırılmalar

1.

$ABCD$  kare ve  $CED$  dik üçgendir.

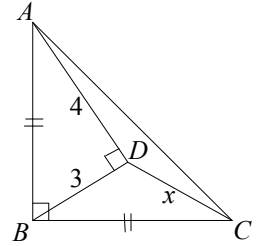
Buna göre  $DEB$  üçgeninin alanı kaç  $br^2$ 'dir?



2.

$ABC$  ikizkenar dik üçgendir.

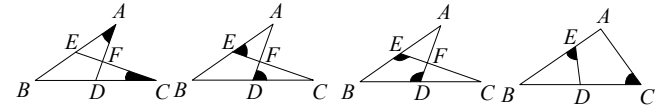
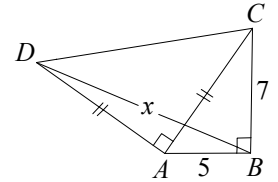
$AD \perp DB$  ise  $|DC| = x$  kaçtır?



3.

$ABC$  dik üçgen ve  $CAD$  ikizkenar dik üçgendir.

Buna göre  $|DB| = x$  kaçtır?



**Teorem.** Yukardaki şekillerde

$$|BE| \cdot |BA| = |BD| \cdot |BC|.$$

**Kanıt:** İlk üç şekilde  $ABD$  ile  $CBE$  üçgenleri benzerdir. Son şekilde de  $ABC$  ile  $DBE$  üçgenleri benzerdir. Eşlemeler yapılırsa  $|BE| \cdot |BA| = |BD| \cdot |BC|$  eşitliğine erişilir.

**Yükseklik Teoremi.** Bir  $ABC$  üçgeninin diklik merkezi  $H$  ve yükseklik ayakları  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ise;

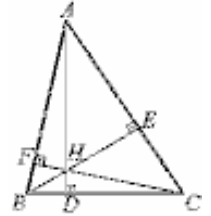
$$|AF| \cdot |AB| = |AE| \cdot |AC|$$

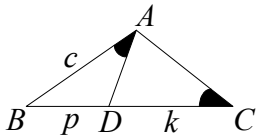
$$|BF| \cdot |BA| = |BD| \cdot |BC|$$

$$|CD| \cdot |CB| = |CE| \cdot |CA|$$

$$|AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF|$$

**Kanıt:**  $AHE \sim DHB$  ve  $CEH \sim BFH$  benzerliklerinden ilki kanıtlanır.  $AEB \sim AFC$ ,  $BFC \sim BEC$  ve  $CDA \sim CFA$  benzerliklerinden de diğer üç eşitlik bulunur.





**Teorem.**  $ABC$  üçgeninin  $BC$  kenarı üzerinde  $m(\angle BAD) = m(\angle BCA)$  olacak şekilde bir  $D$  noktası alınsın. O halde

$$|BA|^2 = |BD| \cdot |BC|.$$

**Kanıt:**  $BAD$  ile  $BCA$  üçgenlerinde hem verilen açılar hem de  $B$  açıları eş olduğundan benzerdiler. Eşleme yapılırsa  $|BA|^2 = |BD| \cdot |BC|$  eşitliğine rahatlıkla erişilir. Şeklin iki soru önceki soruda son şekilde  $E = A$  durumu olduğunu görünüz.

**Örnek.** Yandaki  $ABC$  üçgeninde

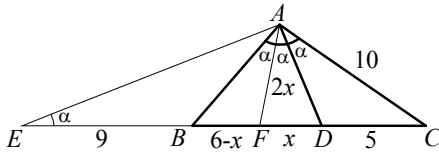
$$m(\angle BAD) = 2 \cdot m(\angle DAC)$$

veriliyor.

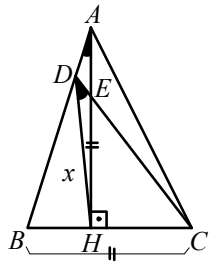
$|AC| = 10$ ,  $|DC| = 5$  ve  $|BD| = 6$  ise  $\text{Alan}(ADC)$

kaçtır?

**Çözüm:** Önce  $CB$  doğrusu üzerinde  $m(\angle CEA) = m(\angle CAD)$  olacak şekilde bir  $E$  noktası alalım.



$CAD$  ve  $CEA$  üçgenlerinin benzerliğinden  $|EB| = 20$  bulunur. Sonra  $BAD$  açısının açıortayını çizelim. İç açıortay teoreminden  $|FD| = x$  ise  $|AF| = 2x$  olur. Aynı benzerliği  $FEA$  ve  $FAB$  üçgenlerinde görürsek;  $(2x)^2 = (6-x) \cdot (15-x)$  olur ki denklem çözümlerse  $x = 3$  bulunur. O halde  $AF \perp EC$  olup,  $\text{Alan}(ADC) = 5 \cdot 6 / 2 = 15$  bulunur.



**Örnek.** Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $AH$  yüksekliktir.  $|EH| = |BC|$  ve  $m(\angle BAH) = m(\angle HDC)$  ise  $\text{Alan}(ABC)$ ,  $x$  cinsinden kaçtır?

**Çözüm:**  $HAD$  ve  $HDE$  üçgenlerinin benzerliğinden

$$x^2 = |HE| \cdot |HA|$$

çıkar.

Diğer yandan  $|HE| = |BC|$  verildiğinden

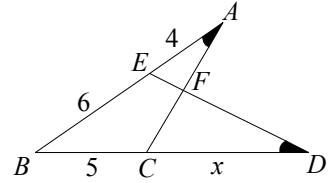
$$x^2 = |BC| \cdot |AH| = 2 \cdot \text{Alan}(ABC)$$

bulunur ki  $\text{Alan}(ABC) = \frac{x^2}{2}$  'dir.

## Alıştırmalar

1.

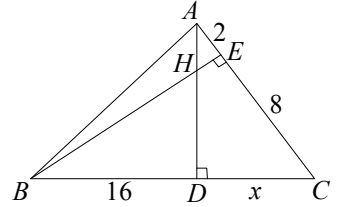
Yandaki şekilde  $m(\angle BAC) = m(\angle EDB)$  ise  $x$  kaçtır?



2.

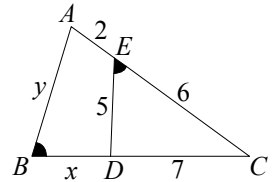
Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $H$  diklik merkezidir.

Buna göre  $|DC| = x$  kaçtır?



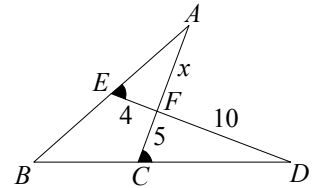
3.

Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $m(\angle ABC) = m(\angle CED)$  ise  $x + y$  toplamı kaçtır?



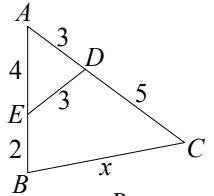
4.

Yandaki şekilde  $m(\angle AED) = m(\angle ACD)$  ise  $|AF| = x$  kaçtır?



5.

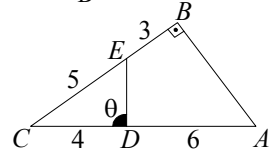
Yandaki şekle göre  $x$  kaçtır?



6.

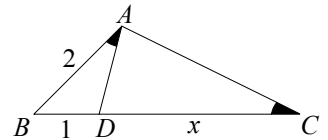
Yandaki  $ABC$  dik üçgeninde

$m(\angle EDC) = \theta$  kaçtır?



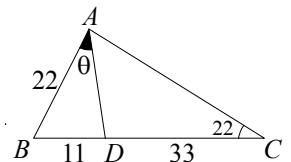
7.

$ABC$  üçgeninde  $m(\angle ACB) = m(\angle DAB)$  ise  $x$  kaçtır?



8.

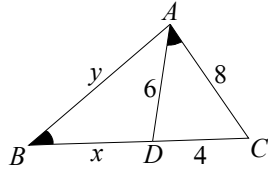
Yandaki  $ABC$  üçgeninde  $m(\angle DAB) = \theta$  kaçtır?





9.

Yandaki  $ABC$  üçgeninde  
 $m(\angle ABC) = m(\angle DAC)$  ise  
 $x + y$  toplamı kaçtır?



10.

Yandaki  $ABCD$  dörtgeninde  
 $m(\angle BAC) = m(\angle DCA)$  olduğuna göre  $|AD| = x$  kaçtır?

