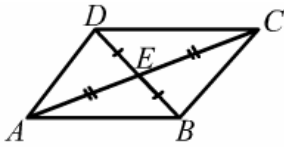


# Geometri Notları

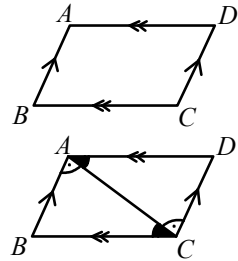
Mustafa YAĞCI, yagcimustafa@yahoo.com

## Paralelkenar

En iyi olmadıkları kesin de meşhur mu desem, çok satan mı bilmiyorum, kimi üniversiteye hazırlık geometri kitaplarında paralelkenar tanımı şöyle yapılıyor: ‘*Karşılıklı kenarları paralel ve eşit olan dörtgenlere paralelkenar denir*’. Siz de bunda bir sorun görmemiş olabilirsiniz, gerçekten tanımda yanlış bir bilgi yok ama fazla bilgi var.



Tanımın içine paralelkenara has bir özeliği de buluşturmışlar. Anlayacağınız karşılıklı kenarlar paralel ise kenarlar zaten eşittir. Bunun tanımda söylenmesine gerek yok. Çünkü bu, kanıtlanabilir bir teoremdir. Kanıtlanmalıdır:



**Teorem.** Bir paralelkenarın karşılıklı kenarları birbirlerine eşittir.

**Kanıt:**  $[AC]$  köşegeni çizilirse, iç-ters açılar eşliği gereği  $m(DAC) = m(ACB)$  ve  $m(BAC) = m(ACD)$  olur. O halde  $DAC$  ile  $BCA$  üçgenleri, iç açıları eş olduğundan benzerdirler, hatta  $[AC]$  ortak olduğundan eşitler.

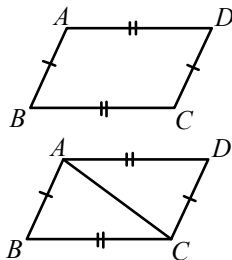
Bu yüzden  $|AD| = |BC|$  ve  $|AB| = |DC|$ ’dir.

O halde paralelkenarın tanımı şöyle olmalı: ‘‘*Karşılıklı kenarları birbirlerine paralel olan dörtgenlere paralelkenar denir*.’’

Peki, tanımda paralellik yerine eşitliği kullansak olur mu? Paralelliği bir özellik gibi kanıtlasak? Olur, onu da kanıtlayalım:

**Teorem.** Karşılıklı kenarları eşit olan dörtgenler paralelkenardır.

**Kanıt:**  $[AC]$  köşegeni çizildiğinde  $DAC$  ile  $BCA$  üçgenlerinin karşılıklı üç kenarı da eşit olduğundan K-K-K ge-



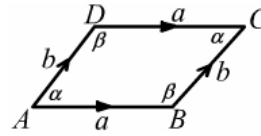
reği eş olduklarını görürüz. O halde

$$m(DAC) = m(ACB) \text{ ve } m(BAC) = m(ACD)$$

olur ki bu da bize  $AD \parallel BC$  ve  $AB \parallel DC$  olduğunu anlatır.

Fakat, biz yine de ilk tanımı esas alacağız, zira paralelkenar adı üstünde paralellığe parmak basıyor. Bunun için biz paralelkenara ‘*Karşılıklı kenarları birbirlerine paralel dörtgendir*’ diyeceğiz.

Şimdi, yukardaki kanıtların doğruluklarını kaydedelim:



**Paralelkenarın özellikleri.**

Paralelkenarda karşılıklı açılar da eşittir. Komşu açılarının birbirlerinin bütünleri olduğunu düşünerek bunu hemen görebilirsiniz. Yani;

$$m(A) = m(C) \text{ ve } m(B) = m(D)$$

Ayrıca;

$$m(A) + m(B) = m(C) + m(D) = 180^\circ.$$

Farklı kenar uzunlukları  $a$  ve  $b$  olan bir paralelkenarın çevresi görüldüğü üzere  $2a+2b$ ’dir.

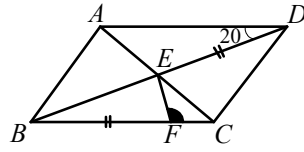
Paralelkenarda köşegenler farklı uzunluktadır fakat birbirini ortalar. Aslında ‘*köşegenler farklı uzunluktadır*’ demek bir bakıma yanlış çünkü köşegenlerin eşit olduğu durumda paralelkenar dikdörtgen veya kareye dönüşür ama dikdörtgen ve kare de birer paralelkenardır. Bizim burada ve yazının ilerleyen kısımlarında kastımız (bahsi geçen dörtgenlerin her biri kendi konusunda detaylı olarak işleneceğinden) dikdörtgen veya kare olmayan paralelkenar olacaktır. Bu mahiyette düşünerek  $|AC| \neq |BD|$  diyoruz.

Köşegenlerin kesiştiği nokta olan  $E$  noktası aynı zamanda paralelkenarın ağırlık merkezidir.

### Alıştırımlar

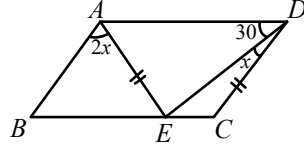
1.

$ABCD$  paralelkenar  
 $m(\angle ADB) = 20^\circ$   
 $|DE| = |BF|$   
 $m(\angle EFC) = ?$



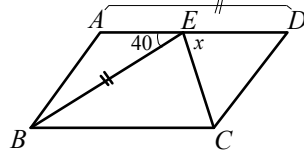
2.

$ABCD$  paralelkenar  
 $m(\angle ADE) = 30^\circ$   
 $|AE| = |DC|$   
 $m(\angle BAE) = 2x$   
 $m(\angle DCE) = x = ?$



3.

$ABCD$  paralelkenar  
 $m(\angle AEB) = 30^\circ$   
 $|AD| = |BE|$   
 $m(\angle DEC) = x = ?$

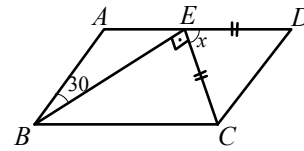


4.

Bir paralelkenarın üç iç açısının ölçüleri toplamı  $310^\circ$  ise, en büyük iç açısının ölçüsü, en küçük iç açısının ölçüsünden kaç fazladır?

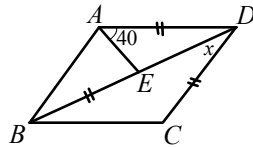
5.

$ABCD$  paralelkenar  
 $m(\angle ABE) = 30^\circ$   
 $BE \perp EC$   
 $|ED| = |EC|$   
 $m(\angle DEC) = x = ?$



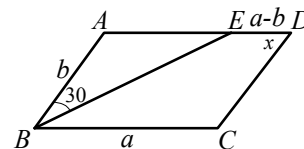
6.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[BD]$  köşegen  
 $m(\angle EAD) = 40^\circ$   
 $|AD| = |DC| = |BE|$   
 $m(\angle BDC) = x = ?$



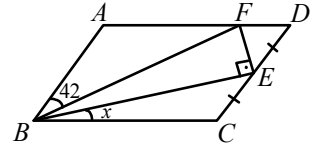
7.

$ABCD$  paralelkenar  
 $|BC| = a, |BA| = b$   
 $|ED| = b - a$   
 $m(\angle ABE) = 30^\circ$   
 $m(\angle CAD) = x = ?$



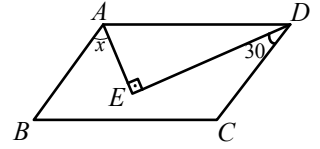
8.

$ABCD$  paralelkenar  
 $|CE| = |ED|, |BA| = |AF|$   
 $BE \perp EF$   
 $m(\angle ABF) = 42^\circ$   
 $m(\angle CBE) = x = ?$



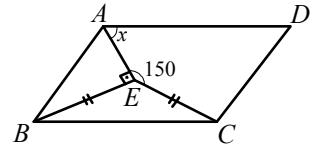
9.

$ABCD$  paralelkenar  
 $AE \perp ED$   
 $m(\angle CDE) = 30^\circ$   
 $m(\angle BAE) = x = ?$



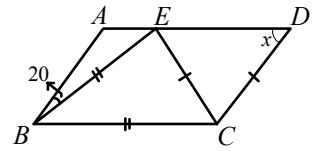
10.

$ABCD$  paralelkenar  
 $AE \perp ED$   
 $m(\angle CDE) = 30^\circ$   
 $m(\angle BAE) = x = ?$



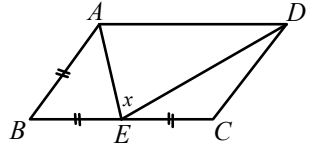
11.

$ABCD$  paralelkenar  
 $|BE| = |BC|$   
 $|CE| = |CD|$   
 $m(\angle ABE) = 20^\circ$   
 $m(\angle CDA) = x = ?$



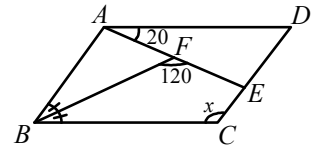
12.

$ABCD$  paralelkenar  
 $|AB| = |BE| = |EC|$   
 $m(\angle AED) = x = ?$



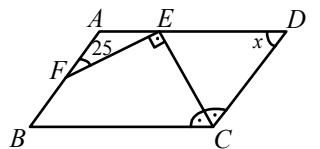
13.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[BF]$  açıortay  
 $m(\angle DAE) = 20^\circ$   
 $m(\angle BFE) = 120^\circ$   
 $m(\angle CDA) = x = ?$



14.

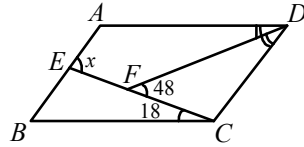
$ABCD$  paralelkenar  
 $[CE]$  açıortay  
 $CE \perp EF$   
 $m(\angle AFE) = 25^\circ$   
 $m(\angle CDA) = x = ?$



15.

ABCD paralelkenar

[DF] açıortay

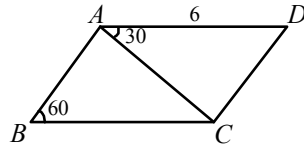
 $m(\angle BCE) = 18^\circ$  $m(\angle DFC) = 48^\circ$  $m(\angle CEA) = x = ?$ 

16.

ABCD paralelkenar

 $m(\angle CAD) = 30^\circ$  $m(\angle ABC) = 60^\circ$ 

Çevre(ABCD) = ?



17.

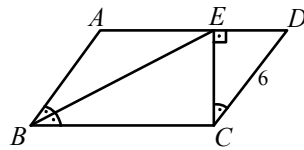
ABCD paralelkenar

 $CE \perp AD$ ,  $|CD| = 6$ 

[BE] açıortay

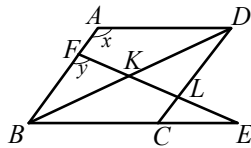
 $m(\angle ABE) = m(\angle ECD)$ 

Çevre(AEB) = ?

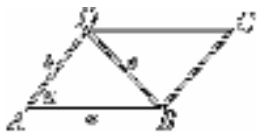


18.

ABCD paralelkenar

 $|BA| = |AD|$ ,  $|BK| = |KE|$  $m(\angle BAD) = x^\circ$  $m(\angle BFE) = y^\circ$  $x/y$  oranı kaçtır?

### Paralelkenarda uzunluk



**Teorem.** Bir paralelkenarda köşegen uzunluklarının kareleri toplamı, kenar uzunluklarının kareleri toplamının 2 katıdır. Yani;  $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ .

**Kanıt 1:** ADB ve ADC üçgenlerinde kosinüs teoreminden bulunan

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$f^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$e^2 + f^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$$

olduğu görülür.

**Kanıt 2:** Diğer köşegeni de çizip kenarortay teoreminden veya isterseniz Stewart Teoremi'nden bulabilirsiniz.

**Kanıt 3:** Daha önce dörtgenler konusundan Euler Teoremi'ni hatırlayın. Köşegenlerinin orta noktaları arasındaki uzaklığı  $x$  olan dörtgenlerde

$$e^2 + f^2 + 4x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

oluyordu.

Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından  $x = 0$ 'dır. Bundan dolayı tüm paralel kenarlı dörtgenlerde  $e^2 + f^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  kuralı geçerlidir. Paralelkenarda  $c = a$  ve  $d = b$  olduğundan

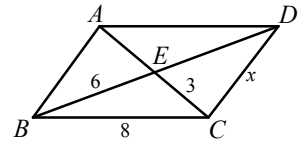
$$e^2 + f^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$$

olur. Hatta buradan karenin ve dikdörtgenin zaten herkes tarafından bilinen köşegen uzunlukları da kenarlar cinsinden bulunabilir. Tabi buna ne gerek var, ayrı mesele!

19.

ABCD paralelkenar

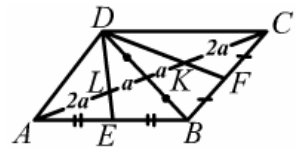
AC ve BD köşegen

 $|EC| = 3$ ,  $|EB| = 6$  $|BC| = 8$ ,  $|CD| = x = ?$ 

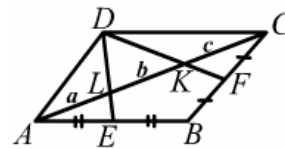
### Paralelkenarda benzerlik

**Teorem.** Bir paralelkenarda bir köşeyi karşı iki kenarın orta noktalarına birleştiren doğru parçaları köşegeni uzunlukça üç eş parçaya böler.

**Kanıt 1:**  $|AL| = a$ ,  $|LK| = b$ ,  $|KC| = c$  olsun.  $|DC| = 2 \cdot |AE|$  olduğundan kelebekten  $b + c = 2a$  ve  $|AD| = 2 \cdot |CF|$  olduğundan kelebekten  $a + b = 2c$ 'dir. Bu eşitlikler birlikte çözümlerse  $a = b = c$  olduğu gösterilmiş olur.

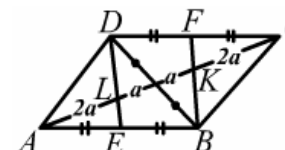


**Kanıt 2:** Köşegenler birbirini ortaladığından L ve K noktaları sırasıyla ADB ve CDB üçgenlerinin ağırlık merkezidir. Daha önce üçgende kenarortayların birbirlerini 2 : 1 oranında böldüğünü kanıtladığımızdan  $|AL| = |LK| = |KC|$  olduğu da kanıtlanmış olur.



ler.

**Teorem.** Bir paralelkenarda karşı iki köşeyi karşı iki eş kenarın orta noktalarına birleştiren doğru parçaları köşegeni uzunlukça üç eş parçaya bölerler.



**Kanıt:** Yine köşegenlerin birbirini ortaladığı düşünülürse, L ve K noktalarının sırasıyla ADB ve CDB üçgenlerinin

ağırlık merkezi olduğunu görürüz. Dolayısıyla istenen aşıkardır.

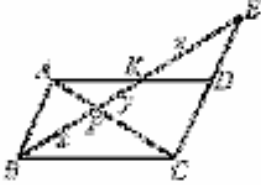
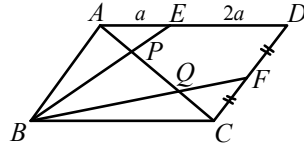
20.

 $ABCD$  paralelkenar

$|ED| = 2 \cdot |AE|$

$|DF| = |FC|$

$|AP| : |PQ| : |QC| = ?$



**Teorem.** Yandaki şekilde  $ABCD$  bir paralelkenar ise

i.  $|BF|^2 = |FK| \cdot |FE|$

ii.  $\frac{1}{|BF|} = \frac{1}{|BK|} + \frac{1}{|BE|}$

**Kanıt:** İlk bağıntının kanıtı üçgende benzerlik konusunda yapılmıştı.

Şimdi ikinci bağıntıyı kanıtlayalım.

$$|BF|^2 = |FK| \cdot |FE|$$

$$= (|BK| - |BF|) \cdot (|BE| - |BF|)$$

$$= |BK| \cdot |BE| - |BK| \cdot |BF| - |BF| \cdot |BE| + |BF|^2$$

olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$|BK| \cdot |BE| = |BK| \cdot |BF| + |BF| \cdot |BE|$$

bulunur.

Eşitliğin her iki tarafı  $|BF| \cdot |BK| \cdot |BE|$ 'ye bölünürse

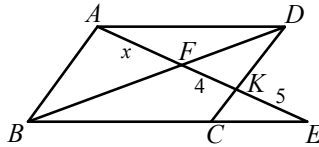
$$\frac{1}{|BF|} = \frac{1}{|BK|} + \frac{1}{|BE|}$$

21.

 $ABCD$  paralelkenar $[BD]$  köşegen

$|FK| = 4, |KE| = 5$

$|AF| = x$  kaçtır?



**Teorem.**  $ABCD$  bir paralelkenar olsun.  $AB$  ve  $CD$  kenarlarını sırasıyla  $K$  ve  $L$  noktalarında kesen bir doğru,  $BD$  köşegenini  $P$ 'de,  $AD$  ve  $BC$  doğrularını da sırasıyla  $E$  ve  $F$  noktalarında kessin. O halde

$$|PK| \cdot |PE| = |PL| \cdot |LF|$$

**Kanıt:**  $P$  merkezli iki keleşe dikkat ediniz.

Taralı keleşekten

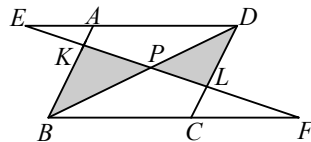
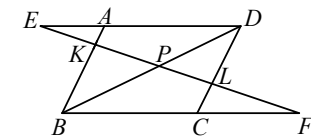
$$\frac{|DP|}{|PB|} = \frac{|KP|}{|PL|}$$

Taralı olmayan  $P$  merkezli keleşe göre ise

$$\frac{|DP|}{|PB|} = \frac{|PE|}{|PF|}$$

Bu iki oran eşitlenir ve içler dışlar

çarpımı yapılırsa  $|PK| \cdot |PE| = |PL| \cdot |LF|$ .

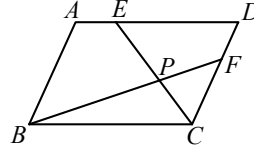
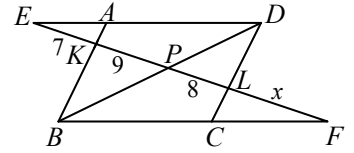


22.

 $ABCD$  paralelkenar $BD$  köşegen

olduğuna göre

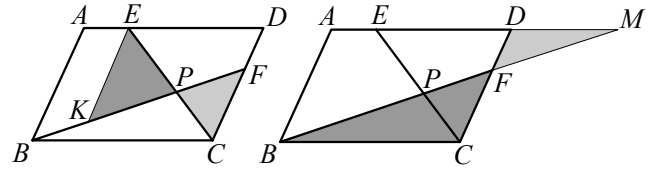
$|LF| = x = ?$



Yandaki  $ABCD$  paralelkenarında  $AE/ED$ ,  $DF/FC$ ,  $BP/PF$ ,  $CP/PE$  oranlarından ikisi verilerek diğer

oranlardan birinin veya ikisinin sorulduğu soru tiplerine göz atacağız. Göze çarpan 4 farklı metot var, dördü de keleş oluşturulmaktan geçiyor. Bunların ikisinde paralelkenar içinde, ikisinde de dışında keleş oluşturuyoruz.

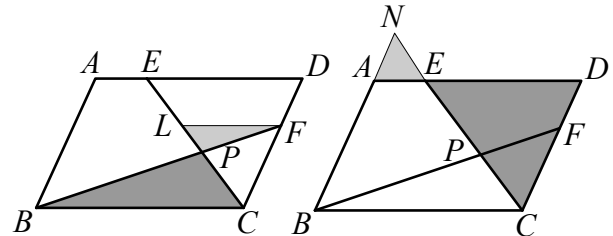
**$EP/PC$ 'yi bulmak için:**  $AE/ED$  ve  $DF/FC$ 'nin bilindiğini farzedelim. Aşağıdaki iki yol, en uygunudur:



Soldaki metotta  $AB$ 'ye paralel bir  $EK$  çiziyoruz.  $DF/AB$  ve  $AE/ED$  bilindiğinden  $|EK|$ 'yi buluyoruz. Böylelikle  $EP/PC = EK/FC$  oluyor.

Sağdaki metotta ise  $|BF|$ 'yi  $F$  yönünde uzatarak taralı keleşe elde ediyoruz.  $DF/FC$  bilindiğinden  $|DM|$ 'yi buluyor ve  $P$  merkezli keleşekten  $EP/PC = MP/BP$  oluyor.

**$FP/BP$ 'yi bulmak için:** Yine  $AE/ED$  ve  $DF/FC$ 'nin bilindiğini farzedelim. Bunda da şu iki yol en uygunudur:



Soldaki metotta  $BC$ 'ye paralel bir  $FL$  çizerek, taralı keleşe elde ediyoruz.  $CF/FD$  ve  $AE/ED$  bilindiğinden Tales Teoremi'nden  $|FL|$ 'yi buluyoruz. Daha sonra  $FP/BP$ 'nin  $LF/BC$  olduğunu görmek hiç de zor olmasa gerek.

Sağdaki metotta ise  $|CE|$ 'yi  $BA$ 'yı kesene dek uzatıyoruz. Amacımız tabii ki taralı keleşe oluşturmak.  $AE/ED$ 'yi bildiğimizden  $|NA|$ 'yi buluyoruz.

$P$  merkezli kelebek bize aradığımız  $FP/BP$  oranını  $FC/NB$  olarak veriyor.

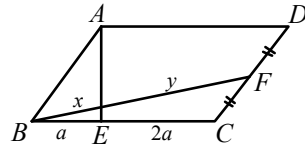
23.

$ABCD$  paralelkenar

$$|DF| = |FC|$$

$$|EC| = 2 \cdot |BE|$$

$x/y$  oranı kaçtır?



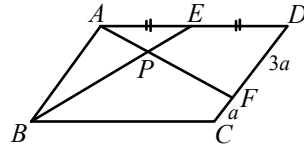
24.

$ABCD$  paralelkenar

$$|AE| = |ED|$$

$$|DF| = 3 \cdot |FC|$$

$$|BP|/|PE| \text{ oranı kaçtır?}$$



25.

$ABCD$  paralelkenar

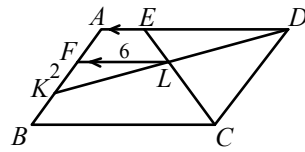
$FL \parallel AD$

$$|FK| = 2, |FL| = 6$$

$$|DE| = 3 \cdot |AE|$$

$$|BK| = 2 \cdot |KA|$$

ise paralelkenarın çevresi kaçtır?



26.

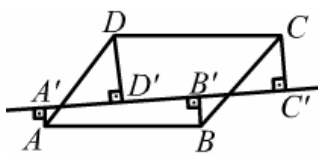
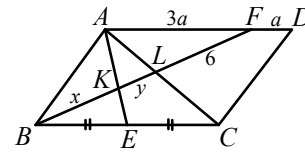
$ABCD$  paralelkenar

$$|AF| = 3 \cdot |FD|$$

$$|BE| = |EC|$$

$$|LF| = 6,$$

olduğuna göre  $x - y$  farkı kaçtır?



**Teorem.** Bir paralelkenarı yine aynı düzlemdeki bir doğru kesiyorsa; bu doğruya paralelkenarın köşelerinden

indirilen dikmeler şeklindeki gibi

$$|CC'| - |AA'| = |DD'| - |BB'|$$

bağıntısını sağlar.

**Kanıt:**  $C$  köşesinden  $|DD'|$  doğrusuna indirilen dikme ayağı  $C''$  ve  $B$  köşesinden  $AA'$  doğrusuna indirilen dikme ayağı  $B''$  olsun.

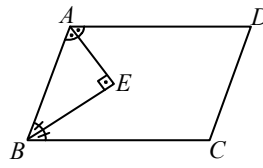
$CC''D$  ve  $BB''A$  üçgenlerinin eşliğinden

$$|CC'| - |AA'| = |DD'| - |BB'|$$

bulunur.

**Teorem.** Bir paralelkenarın düzleminde paralelkenarı kesmeyecek şekilde alınacak olan bir doğruya karşılıklı köşelerden indirilen dikmelerin uzunlukça toplamaları aralarında eşit ve ağırlık merkezinden inen dikmenin uzunluğunun ikiye katıdır.

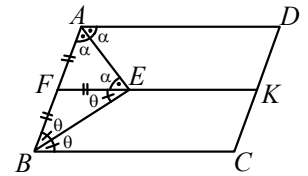
**Kanıt:** Kanıtı okuyucuya bırakılmıştır.



**Teorem.** Bir paralelkenarda komşu iki açının açıortayları birbirini dik keser. Kesiştikleri nokta da orta taban üzerinde olur.

**Kanıt:**  $A$  ve  $D$  açıları bütünler olduğundan  $2\alpha + 2\theta = 180^\circ$  dir. O halde  $\alpha + \theta = 90^\circ$ .

Açıortayların kesiştiği noktaya  $E$  diyerek,  $E$ 'den tabanlara paralel olarak geçen  $FK$  doğrusunu çizelim.



İç-ters açılar gereği

$$m(\angle DAE) = m(\angle AEF) \text{ ve } m(\angle CBE) = m(\angle BEF)$$

olur. O halde

$$|EF| = |AF| = |FB|$$

demektir ki bu da  $FK$ 'nın orta taban doğrusu olduğunu anlamamıza yeter.

27.

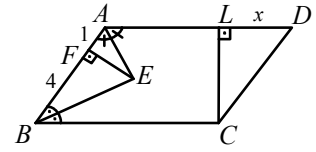
$ABCD$  paralelkenar

$BE \perp EF, CL \perp AD$

$AE$  ve  $BE$  açıortay

$$|AF| = 1, |BF| = 4$$

$$|LD| = x = ?$$



28.

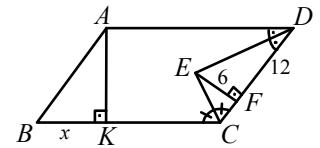
$ABCD$  paralelkenar

$CD \perp EF, AK \perp BC$

$CE$  ve  $DE$  açıortay

$$|EF| = 6, |DF| = 12$$

$$|BK| = x = ?$$



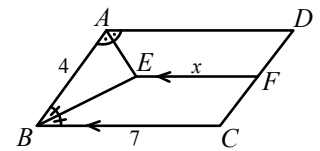
29.

$ABCD$  paralelkenar

$AE$  ve  $BE$  açıortay

$$|AB| = 4, |BC| = 7$$

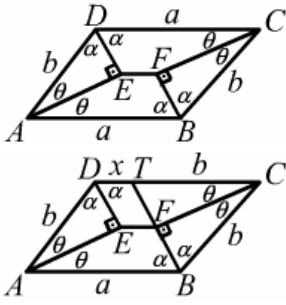
$$|EF| = x = ?$$



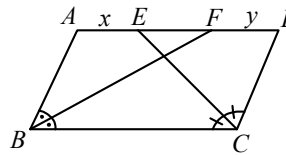
**Teorem.** Bir paralelkenarda tüm iç açıortayların ikişer ikişer kesişim noktaları bir dikdörtgen oluşturur.

**Kanıt:** Komşu iki açıortayın dik kesişeceğini daha önce kanıtlamıştık. Tümü düşünülünce neden

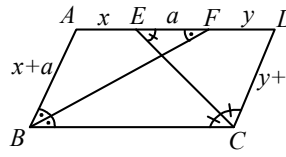
dikdörtgen olduğu sanırım şekilden de rahatlıkla görülebilir.



30.  $ABCD$  paralelkenar  
 $[AE]$  ve  $[DF]$  açıortay  
 $|AD| = 18, |EF| = 10$   
 $|AB| = x$  kaçtır?



31.  $ABCD$  paralelkenar  
 $[BE]$  ve  $[CE]$  açıortay  
 $|BE| = 8, |CE| = 6$   
 $\text{Alan}(AED) = 12$   
 $|CD| = x$  kaçtır?



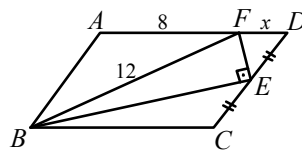
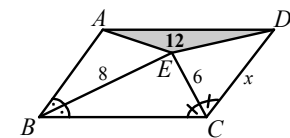
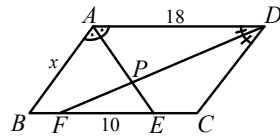
32.  $ABCD$  paralelkenar  
 $BE \perp EF$   
 $|CE| = |ED|$   
 $|AF| = 8, |BF| = 12$   
 $|FD| = x = ?$

**Teorem.** Yandaki şekilde  $AE, DE, CF, BF$  açıortay ise  $|EF| = a - b$ .

**Kanıt:**  $BF$  doğrusu,  $[DC]$  kenarını  $T$ 'de kessin.  $DEFT$  bir paralelkenar olur.  $|EF| = x$  ise  $|DT| = x$ . Ayrıca  $x + b = a$  olduğundan  $x = b - a$  olarak bulunur ki eşitlik kanıtlanmış olur.

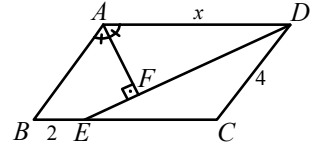
**Teorem.** Bir  $ABCD$  paralelkenarında  $B$  ve  $C$  iç açıortayları  $AD$  kenarını sırasıyla  $F$  ve  $E$  noktalarında kessin. O halde

**Kanıt:**  $|EF| = a$  olsun.  $BAF$  ve  $CDE$  üçgenlerin ikizkenar olduğu görülürse  $|AB| = x + a$  ve  $|CD| = y + a$  bulunur.  $|AB| = |CD|$  olduğundan  $x = y$  bulunmuş demektir.



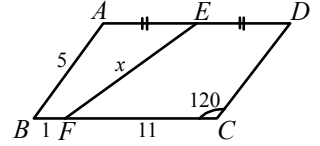
33.

$ABCD$  paralelkenar  
 $AF \perp ED$   
 $AF$  açıortay  
 $|BE| = 2, |CD| = 4$   
 $|AD| = x = ?$



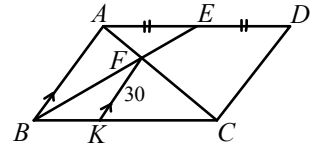
34.

$ABCD$  paralelkenar  
 $|AF| = |ED|$   
 $m(\angle BCD) = 120^\circ$   
 $|BA| = 5, |BF| = 1$   
 $|FC| = 11$  ise  $x = ?$



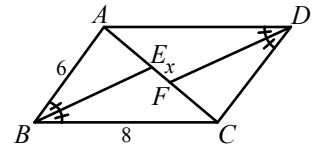
35.

$ABCD$  paralelkenar  
 $|AE| = |ED|$   
 $|FK| \parallel |AB|$   
 $|FK| = 30$  ise  $|AB| = ?$



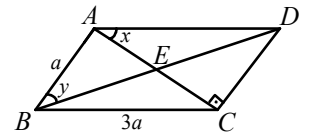
36.

$ABCD$  paralelkenar  
 $BE$  ve  $DE$  açıortay  
 $|AB| = 6, |BC| = 8$   
 $|AC| = 7, |EF| = x = ?$



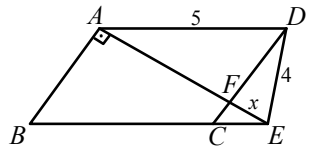
37.

$ABCD$  paralelkenar  
 $AC \perp CD$   
 $|BC| = 3 \cdot |BA|$   
 $x + 2y = ?$



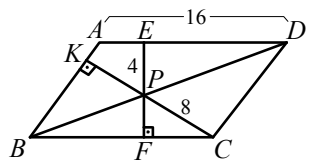
38.

$ABCD$  paralelkenar  
 $BA \perp AE$   
 $|AD| = |AE|$   
 $|AD| = 5, |DE| = 4$   
 $|FE| = x = ?$



39.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[BD]$  köşegen  
 $EF \perp BC, CK \perp AB$   
 $|EP| = 4, |PC| = 8$   
 $|AD| = 16, |DC| = ?$



40.

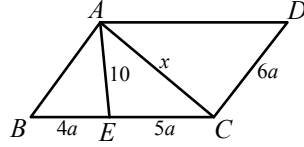
 $ABCD$  paralelkenar

$|BE| = 4a$

$|EC| = 5a$

$|CD| = 6a$

$|AE| = 10$  ise  $x = ?$



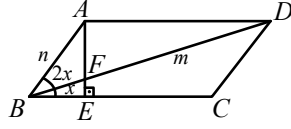
41.

 $ABCD$  paralelkenar

$m(\angle ABD) = 2x$

$m(\angle DBC) = x$  ise

$m/n$  kaçtır?

**Paralelkenarda Alan.**

Bir paralelkenarda bir köşegen üçgeni, eşit alanlı iki parçaya böler. Çünkü iki parçanın tabanları ve o

tabana inen yükseklikleri eşittir. O halde yandaki şekilde  $DB$  köşegeninin çizildiği farzedilirse;  $ADB$  üçgeni ile  $DCB$  üçgenlerinin alanları eşit ve paralelkenarın alanının yarısı olur. Yani

$$\text{Alan}(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$

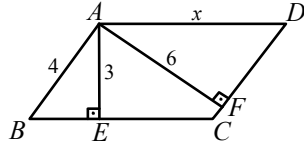
42.

 $ABCD$  paralelkenar

$AE \perp BC$

$AF \perp CD$

$|AD| = x$  kaçtır?



43.

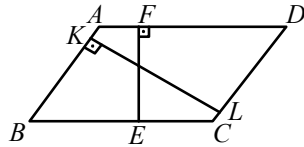
 $ABCD$  paralelkenar

$AE \perp BC$

$AF \perp CD$

$|FE| = 4, |KL| = 6$

$|AB| = 4$  ise  $|AD| = x$  kaçtır?



44.

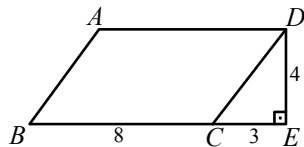
 $ABCD$  paralelkenar

$|BC| = 8, |EC| = 3$

$|DE| = 4$  ve

$AE \perp BC$  ise  $A'$ 'nın

$DC'$ 'ye uzaklığı kaçtır?



45.

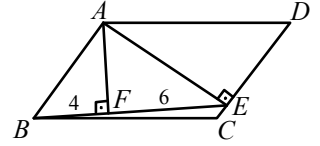
 $ABCD$  paralelkenar

$AF \perp BE$

$AE \perp CD$

$|BF| = 4, |FE| = 6$

$\text{Alan}(ABCD) = ?$



Bununla birlikte paralelkenarın alanı

$$2 \cdot \text{Alan}(ABD) = a \cdot b \cdot \sin \theta$$

formülünden de bulunabilir.

Son olarak dörtgenlerin alan formülünü kullanalım. Paralelkenar da bir dörtgen olduğu için

$$\text{Alan}(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin \alpha$$

formülü burada da geçerli.

46.

Çevresi 20 birim olan bir paralelkenarın alanı en çok kaç olabilir?

47.

Kısa kenarı 3 birim, uzun kenarı 4 birim olan bir paralelkenarın alanı en büyük olduğunda köşegeni kaç birim olur?

48.

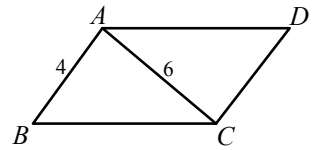
Bir köşegeni 7 birim, diğer köşegeni 8 birim olan bir paralelkenarın alanı en çok kaç olabilir?

49.

 $ABCD$  paralelkenar

$|AB| = 4, |AC| = 6$

ise  $\text{Alan}(ABCD)$  en çok kaç olabilir?



50.

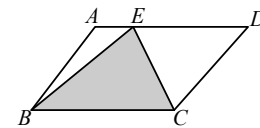
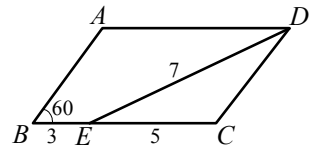
 $ABCD$  paralelkenar

$m(\angle ABC) = 60^\circ$

$|BE| = 3, |EC| = 5$

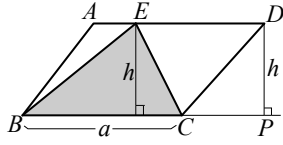
$|DE| = 7$  ise

$\text{Alan}(ABCD) = ?$

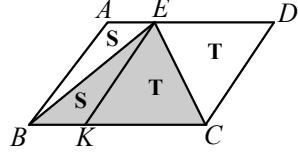


**Teorem.** Bir paralelkenarın herhangi bir kenarı ile, karşısındaki kenarda alınan bir noktanın oluşturduğu üçgenin alanı, paralelkenar alanının yarısıdır.

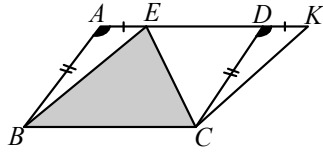
**Kanıt 1:**  $E$  ve  $D$  köşelerinin  $BC$  doğrusuna uzaklığına  $h$ ,  $[BC]$  kenar uzunluğuna da  $a$  diyelim. Paralelkenar alanı  $a.h$  iken taralı üçgen alanı  $a.h/2$  olduğundan kanıt biter.



**Kanıt 2:**  $E$ 'den  $AB$ 'ye paralel çizilen doğru  $BC$ 'yi  $K$ 'da kessin.  $BE$  ve  $CE$  doğruları, oluşan  $ABKE$  ve  $EKCD$  paralelkenarlarının köşegeni olurlar.  $ABE$  ile  $BEK$  ve  $EKC$  ile  $CDE$  üçgenleri denk olduğundan taralı alanın paralelkenar alanının yarısı olduğu anlaşılmış olur.



**Kanıt-3:**  $[AD]$ 'yi  $D$  yönünde  $[AE]$  kadar uzatırsak,  $BAE$  ile  $CDK$  üçgenleri K-A-K gereği eş olurlar. Taralı üçgen  $ABCK$  paralelkenarının yarısı olduğundan  $ABCD$  paralelkenarının da yarısıdır. Zira bu paralelkenarlar aynı taban ve yüksekliğe sahip olduğundan denkleştir.

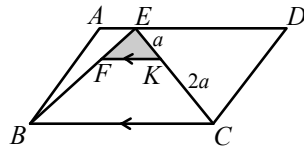


**51.**

$ABCD$  paralelkenar  
 $FK \parallel BC$

$|KC| = 2 \cdot |EK|$

Taralı alan, paralel kenar alanının kaçta kaçtır?



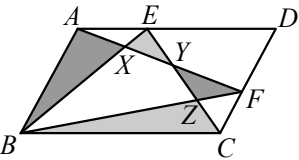
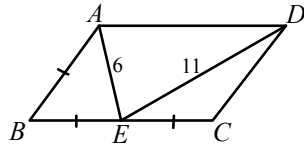
**52.**

$ABCD$  paralelkenar

$|AB| = |BE| = |EC|$

$|AE| = 6, |ED| = 11$

$\text{Alan}(ABCD) = ?$



**Teorem.** Yandaki  $ABCD$  paralelkenarında aynı renkle taranmış üçgenlerin alanları toplamı birbirlerine eşittir.

**Kanıt:**  $AFB$  ve  $BEC$  üçgenlerinin her ikisi de paralelkenarın yarısı kadar alana sahip olduklarından denkleştir.  $BZYX$  bölgesi iki üçgende de ortak olduğundan artı kalan kısımlar mecburen eşit olmak zorundadır.

**53.**

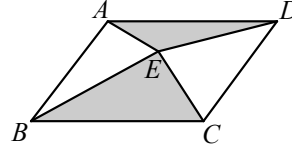
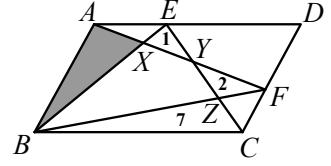
$ABCD$  paralelkenar

$\text{Alan}(EXY) = 1$

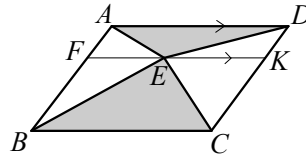
$\text{Alan}(YZF) = 2$

$\text{Alan}(CZB) = 7$

$\text{Alan}(AXB) = ?$



karşılıklı olanlarının toplamı birbirlerine eşit olur.



**Teorem.** Yandaki gibi bir  $ABCD$  paralelkenarının iç bölgesinde alınan bir  $E$  noktası dört köşe ile birleştirilirse oluşan iç üçgenlerin

**Kanıt:**  $E$ 'den tabanlara paralel olarak geçen bir  $FK$  doğrusu çizilirse, taralı üçgenlerin içinde bulundukları paralelkenarların yarısı olduğu görülür. Böylelikle kanıt tamamlanmış olur. Tabanlara değil, yan kenarlara paralel olan bir doğru da iş görürdü.

**54.**

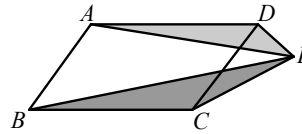
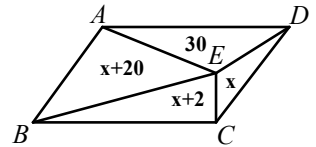
$ABCD$  paralelkenar

$\text{Alan}(AED) = 30$

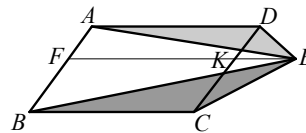
$\text{Alan}(DEC) = x$

$\text{Alan}(CEB) = x + 2$

$\text{Alan}(AEB) = x + 20$  olduğuna göre  $x = ?$



**Teorem.**  $E$  noktası bir önceki teoremde olduğu gibi paralelkenarın içinde değil de dışında alınsa bile, taralı üçgenlerin alanları toplamı, paralelkenar alanının yarısı olur.



$AFKD$  ve  $BCKF$  paralelkenarlarının yarısı olacağından kanıt tamamlanmıştır.

**Kanıt:** Yine  $E$ 'den tabanlara paralel olarak geçen bir  $FK$  doğrusu çizelim.  $ADE$  ve  $BCE$  üçgenleri sırasıyla

**Sonuç:** Bir  $ABCD$  paralelkenarının düzleminde nerede bir  $E$  noktası alırsanız alın, yani ister için-



de, ister dışında, ister üzerinde olsun, bahsi geçen eşitlikleri yazmak mümkün olur.

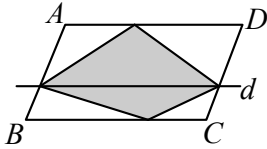
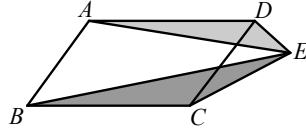
55.

$ABCD$  paralelkenar

$$\text{Alan}(ADE) = 24$$

$$\text{Alan}(BCE) = 26$$

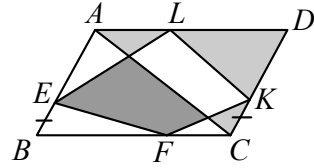
$$\text{Alan}(ABCD) = ?$$



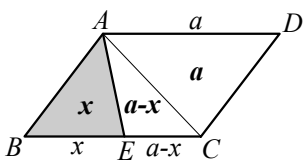
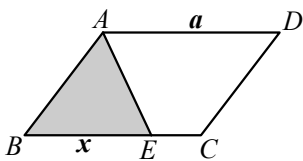
**Teorem.** Bir  $ABCD$  dörtgeninin  $AD$  ve  $BC$  kenarlarına şekildeki paralel olacak şekilde bir  $d$  doğrusu çizilsin. Taralı dörtgensel bölgenin alanı paralelkenar alanının yarısıdır.

**Kanıt:**  $d$  doğrusunun üstünde kalan taralı üçgenin alanı üstteki paralelkenarın alanının yarısı, diğer yandan  $d$  doğrusunun altında kalan taralı üçgenin alanı da alttaki paralelkenarın alanının yarısı olduğundan kanıt tamamlanmış olur.

**Teorem.**  $ABCD$  paralelkenarının  $AB$  ve  $CD$  kenarları üzerinde şekilde görüldüğü gibi  $|EB| = |KC|$  olacak şekilde sırasıyla birer  $E$  ve  $K$  noktaları alınmıştır.  $AD$  ve  $BC$  kenarları üzerinde rasgele alınan  $L$  ve  $F$  noktaları için  $EFLK$  dörtgeni çizilirse  $AC$  köşegeninin altında kalan taralı bölgenin alanı, köşegenin üstünde kalan taralı bölgelerin alanları toplamına eşittir.



**Kanıt:**  $EFLK$  dörtgeninin alanının paralelkenarın yarısı olduğunu kanıtlamıştık.  $ACD$  üçgeninin alanı da paralelkenarın yarısıdır.  $AC$  köşegeninin üst kısmında tarasız olan bölge bahsi geçen iki çokgende de ortak olduğundan eşitlik geçerlidir.



üçgenlerin hepsinin yükseklikleri eşit olduğundan

Bazen de paralelkenar içinde yandaki gibi bir üçgen oluşturularak bu üçgenin alanının paralelkenar alanının kaçta kaçta olduğuna dair sorular sorulur.

Böyle bir durumda paralelkenarı üçgenlere parçalamanız işinizi kolaylaştırır. Zira oluşan

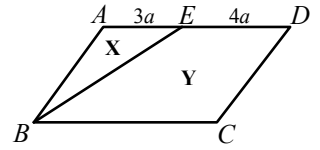
tabanları oranında alanları paylaştırmak mümkün olur.

56.

$ABCD$  paralelkenar

$$|AE|/|ED| = 3/4$$

$$\frac{A(AEB)}{A(BCDE)} = ?$$



57.

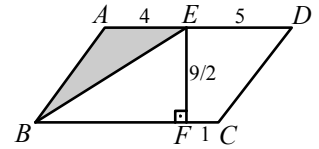
$ABCD$  paralelkenar

$$EF \perp BC$$

$$|AE| = 4, |ED| = 5$$

$$|FC| = 1, |EF| = 9/2$$

$$\text{Alan}(AEB) = ?$$



58.

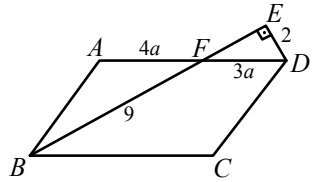
$ABCD$  paralelkenar

$$BE \perp ED$$

$$|BF| = 9, |ED| = 2$$

$$|AF|/|FD| = 4/3$$

$$\text{Alan}(ABCD) = ?$$



59.

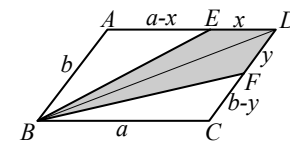
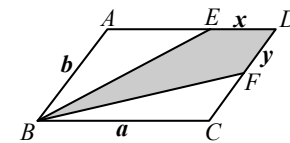
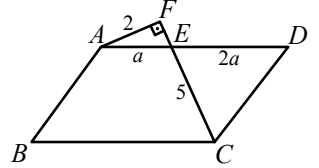
$ABCD$  paralelkenar

$$AF \perp FC$$

$$|AF| = 2, |EC| = 5$$

$$|AE|/|ED| = 1/2$$

$$\text{Alan}(ABCD) = ?$$



Yandaki soru tipi de bir önceki tipile nerdeyse aynıdır.  $a, b, x, y$  değerleri ya da bunlar arasında bir ilişki verilerek taralı dörtgenin paralelkenarı alan olarak kaçta kaçta olduğu falan sorulur.

Böyle bir soruda en pratik görünen kural,  $BD$  köşegenini çizerek  $ABD$  ve  $BCD$  üçgenlerinin alanına hem  $a$ 'ya hem de  $b$ 'ye bölünen bir sayı vermek daha sonra da tabanlar nispetinde alanı parçalamaktır.

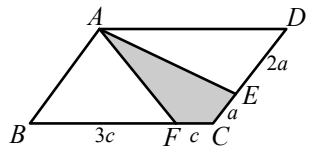
60.

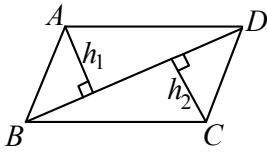
$ABCD$  paralelkenar

$$|DE|/|CE| = 2$$

$$|BF|/|FC| = 3$$

$$\frac{A(AFCE)}{A(ABCD)} = ?$$





**Teorem.** Bir paralelkenarın köşegenine bu köşegenin geçmediği köşelerden indirilen dikmelerin boyları eşittir.

**Kanıt:** ABD ve BCD üçgenlerinin alanları eşitti. BD tabanları da eşit olduğuna göre  $h_1$  ve  $h_2$  için  $h_1 = h_2$  olması doğal sonuçtur.

**61.**

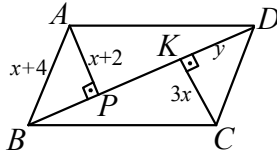
ABCD paralelkenar

$AP \parallel CK \perp BD$

$|AP| = x + 2$

$|KC| = 3x$

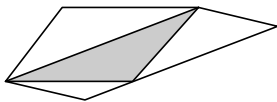
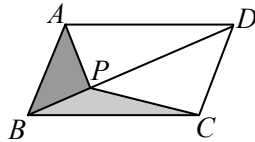
$|AB| = x + 4$  ise  $|KD| = y = ?$



**Teorem.** Bir ABCD paralelkenarının BD köşegeni üzerinde alınan herhangi bir P noktası için APD ve BPC üçgenlerinin alanları eşittir.

Aynı zamanda APD ve PCD üçgenleri de eşit alanlı olur.

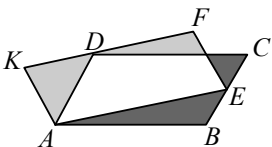
**Kanıt:** Bir önceki teoremde  $h_1 = h_2$  olduğunu kanıtlamıştık. Bu değerleri verilen üçgenlerin birer yüksekliği olduğu görülürse bu güzel teorem böylelikle kanıtlanmış olur.



**Teorem.** Bir paralelkenarın alanı ile bu paralelkenarın köşegenini kenar

kabul eden ayrıca köşegenin üzerinde bulunmadığı iki köşeden birinden geçen paralelkenarın alanı eşittir.

**Kanıt:** Taralı alanın her iki paralelkenarın da alanının yarısı olduğuna bakınız.

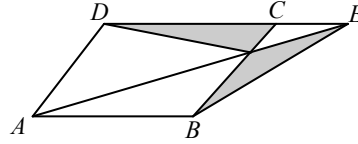
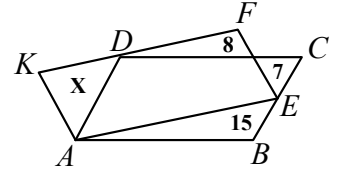


**Teorem.** Yan şekildeki ABCD paralelkenarı ile AEFK paralelkenarının alanları eşittir.

**Kanıt:** ADE üçgeninin alanı her iki paralelkenarın da alanının yarısı olduğundan kanıt bitmiş olur. Buradan farklı renklerle taranmış olan üçgenlerin alanlarının toplamalarının eşit olduğu sonucuna da varılır.

**62.**

ABCD ve AEFK birer paralelkenar  
Alan(ADK) = X = ?



**Teorem.** ABCD paralelkenar ise taralı üçgenlerin alanları eşittir.

**Kanıt:** AE ile

BC'nin kesişimi K olsun. CA köşegeni çizilsin.

Alan(CDK) = Alan(CAK)

Alan(CEB) = Alan(CAE)

olduğundan Alan(EKB) = Alan(CKA) olur, dolayısıyla Alan(DCK) = Alan(EKB).

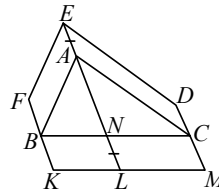
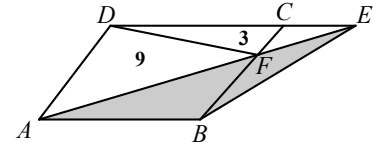
**63.**

ABCD paralelkenar

Alan(DCF) = 3

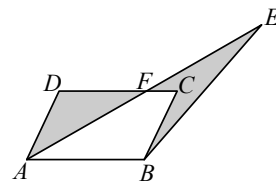
Alan(DFA) = 9

Alan(ABE) = ?



**Pappus Teoremi.** Yan şekilde ABFE, ACDE, BKMC birer paralelkenar ve  $|EA| = |NL|$  ise yan kenarlar üzerindeki paralelkenarların alanları toplamı taban üzerindeki paralelkenarın alanına eşittir.

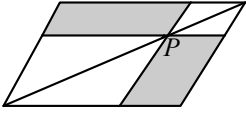
**Kanıt:** FEAB ve BNLK paralelkenarlarının hem tabanları hem de bu tabanlara inen yükseklikleri eşit olduğundan Alan(FEAB) = Alan(BNLK) dır. Aynı sebepten Alan(DEAC) = Alan(CNLM) olduğundan kanıt biter.



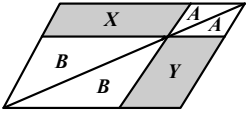
**Teorem.** Yandaki taralı ADF üçgeni ile BEFC konkav dörtgeninin alanları eşit ise  $|AF| = |FE|$  dir.

**Kanıt:** [BF]'yi çizelim.

Alan(ADF) + Alan(FCB) = Alan(AFB) ve Alan(ADF) = Alan(BEFC) ise Alan(BEFC) + Alan(FCB) = Alan(AFB) dir. Yani Alan(AFB) = Alan(FEB). O halde  $|AF| = |FE|$ .



**Teorem.** Yandaki şekilde  $P$  noktası köşegen üzerinde ise taralı paralelkenarların alanları eşittir.

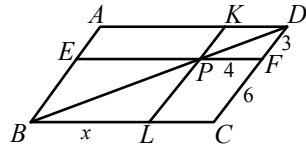


**Kanıt:** Köşegenin taranmamış paralelkenarları iki eşit alan böldüğünü biliyoruz.

Aynı zamanda en büyüğünü de ikiye bölüyor.  $A + B + X = A + B + Y$  olduğundan  $X = Y$  olduğu kanıtlanmış olur.

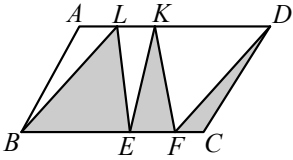
64.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[BD]$  köşegen  
 $AB \parallel KL$ ,  $BC \parallel EF$   
 $|DF| = 3$ ,  $|FC| = 6$   
 $|PF| = 4$ ,  $|BL| = x = ?$



65.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[BD]$  köşegen  
 $AB \parallel KL$ ,  $BC \parallel EF$   
 $\text{Çevre}(AEPK) = x$   
 $\text{Çevre}(PLCF) = y$   
 $\text{Çevre}(ABCD) = ?$

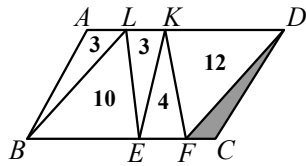


**Teorem.** Yandaki şekilde taralı alanlar toplamı, taralı olmayan alanlar toplamına eşit olup, paralelkenar alanının yarısıdır.

**Kanıt:** Taralı üçgenlerin yüksekliklerinin paralelkenar yüksekliğiyle aynı olup, tabanları toplamının paralelkenar tabanına eşit olduğunu görerek alanlar yazılıp toplanırsa, kanıt bitmiş olur.

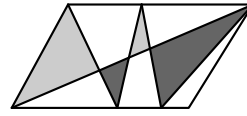
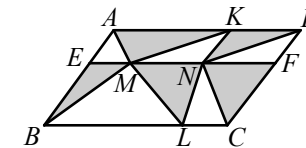
66.

$ABCD$  paralelkenar  
 Taralı olan  $DFC$  üçgeninin alanı kaçtır?



67.

$ABCD$  paralelkenar  
 $AD \parallel EF$   
 Taralı alanlar toplamı paralelkenar alanının kaçta kaçtır?

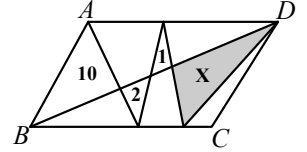


**Teorem.** Bir paralelkenarda yan şekildeki gibi köşegenin birini kesen doğru parçaları çizilirse, farklı renklerle taralı olan üçgenlerin alanları toplamı eşittir.

**Kanıt:** Köşegenin üst tarafındaki taranmamış üçgenlerin alanları toplamı ile köşegenin alt tarafındaki koyu renkle taranmış üçgenlerin alanları toplamı paralelkenarın yarısıdır. Aynı zamanda köşegen de paralelkenarın alanını iki eşit parçaya böldüğünden kanıt bitmiş olur.

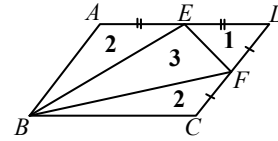
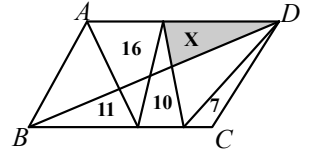
68.

$ABCD$  paralelkenar  
 Taralı olan üçgenin alanı kaçtır?

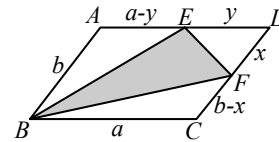


69.

$ABCD$  paralelkenar  
 Taralı olan üçgenin alanı kaçtır?



Yandaki gibi sorularla da sıkça karşılaşırsanız.  $EBF$  üçgeninin alanının paralelkenarın kaçta kaçta olduğu sorulur. Çokça sorulduğundan  $3/8$  oranını ezbere bilmekte fayda var ama  $BE$  ile  $BF$  her zaman kenarortay olarak verilmeyebilir. Bu yüzden şimdi bu tarz soruların çözüm metotlarını göreceğiz.



Burada dikkat edilmesi gereken husus,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  açılarının sinüslerinin eşit olması. O halde alanlara değerler verirken (nasıl olsa oran soruyor diye) bunları hesaba katmayacağız. Diğer yandan  $BAE$ ,  $EDF$  ve  $FCB$  üçgenlerinin alan formüllerinin hepsindeki  $1/2$  değerlerini de hesaba katmayalım, o halde sadece köşe açılarının kollarını oluşturan kenar uzunluklarını çarparak değerler vermek yetecek ama unutmayalım ki paralelkenar alan formülünde  $1/2$  yok, bu yüzden ona vereceğimiz değeri 2 ile çarpacağız. Uzun lafın kısıtı:

$$\text{Alan}(BAE) = b \cdot (a - y)$$

$$\text{Alan}(EDF) = x \cdot y$$

$$\text{Alan}(BCF) = a \cdot (b - x)$$

$$\text{Alan}(ABCD) = 2 \cdot a \cdot b$$

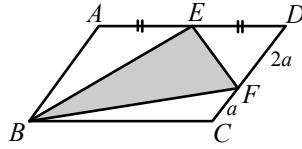
değerlerini vererek soruyu cevaplandıracağız.

**70.** $ABCD$  paralelkenar

$|AE| = |ED|$

$|DF|/|FC| = 2$

$$\frac{A(BEF)}{A(ABCD)} = ?$$

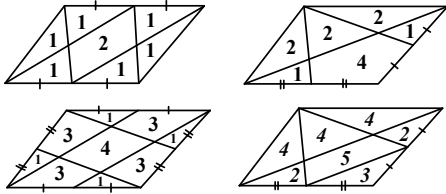
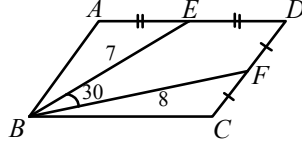
**71.** $ABCD$  paralelkenar

$|AE| = |ED|$

$|DF| = |FC|$

$|BE| = 7, |BF| = 8,$

$m(\angle EBF) = 30^\circ$  ise  $\text{Alan}(ABCD) = ?$



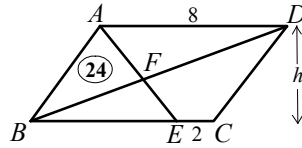
Yukardaki oranları da size alıştırmaya bırakıyorum. Yapamasanız da ezbere bilmeniz faydalı olabilir.

**72.** $ABCD$  paralelkenar

$\text{Alan}(AFB) = 24$

$|AD| = 8, |EC| = 2$

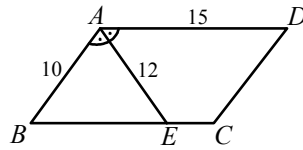
ise  $h$  kaçtır?

**73.** $ABCD$  paralelkenar $[AE]$  açıortay

$|AB| = 10, |AD| = 15$

$|AE| = 12$  ise

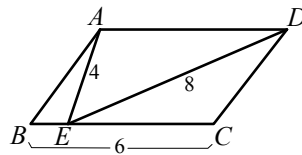
$\text{Alan}(ABCD) = ?$

**74.** $ABCD$  paralelkenar

$|AE| = 4, |ED| = 8$

$|BC| = 6$  ise

$\text{Alan}(ABCD) = ?$

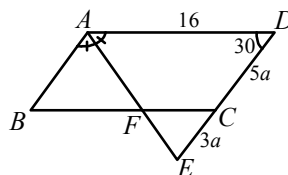
**75.** $ABCD$  paralelkenar $AE$  açıortay

$m(\angle ADE) = 30^\circ$

$|AD| = 16$

$|DC|/|CE| = 5/3$  ise

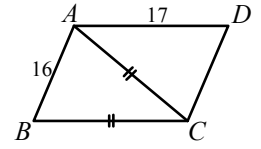
$\text{Alan}(AFCD) = ?$

**76.** $ABCD$  paralelkenar

$|AB| = 16$

$|BC| = |CA| = 17$

$\text{Alan}(ABCD) = ?$

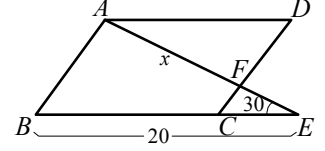
**77.** $ABCD$  paralelkenar

$m(\angle AEB) = 30^\circ$

$|BE| = 20$

$\text{Alan}(ABCD) = 100$

$|AF| = x = ?$

**78.** $ABCD$  paralelkenar

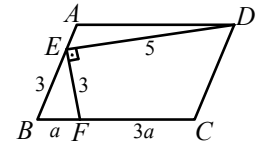
$DE \perp EF$

$|FC| = 3|FB|$

$|EB| = |EF| = 3$

$|ED| = 5$  ise

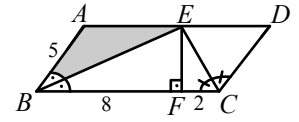
$\text{Alan}(ABCD) = ?$

**79.** $ABCD$  paralelkenar $[CE]$  ve  $[BE]$  açıortay

$EF \perp BC$

$|AB| = 5, |BF| = 8$  ve

$|FC| = 2$  ise  $\text{Alan}(ABE) = ?$

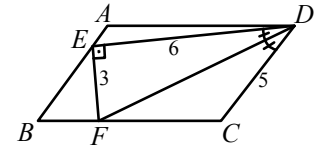
**80.** $ABCD$  paralelkenar

$m(\angle CDF) = m(\angle FDE)$

$DE \perp EF, |EF| = 3,$

$|ED| = 6, |DC| = 5$

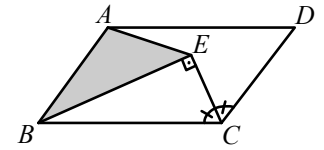
$\text{Alan}(ABCD) = ?$

**81.** $ABCD$  paralelkenar $[CE]$  açıortay

$CE \perp BE$

$\text{Alan}(ABCD) = x$  ise

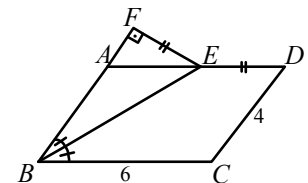
$\text{Alan}(AEB) = ?$

**82.** $ABCD$  paralelkenar $[BE]$  açıortay

$EF \perp BF$

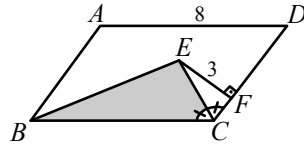
$|DC| = 4, |BC| = 6$

$|FE| = |ED| = x = ?$



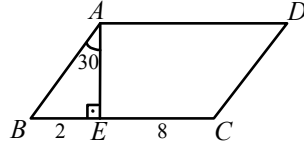
83.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[CE]$  açıortay  
 $EF \perp DC$   
 $|EF| = 3$ ,  $|AD| = 8$   
 $\text{Alan}(BEC) = ?$



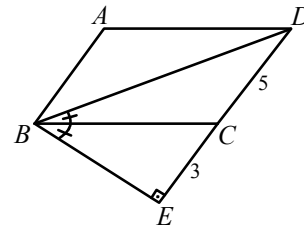
84.

$ABCD$  paralelkenar  
 $m(\angle BAE) = 30^\circ$   
 $|BE| = 2$ ,  $|EC| = 8$   
 $AE \perp BC$   
 $\text{Alan}(AECD) = ?$



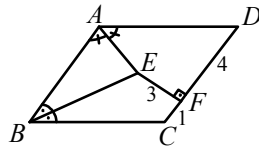
85.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[BC]$  açıortay  
 $EB \perp DE$   
 $|EC| = 3$ ,  $|CD| = 5$   
 $\text{Alan}(ABCD) = ?$



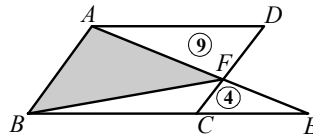
86.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[AE]$  ve  $[BE]$  açıortay  
 $EF \perp CD$   
 $|EF| = 3$ ,  $|CF| = 1$  ve  
 $|FD| = 4$  ise  $|BC| = ?$



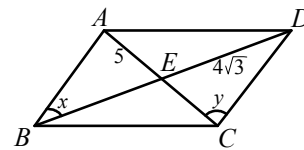
87.

$ABCD$  paralelkenar  
 $\text{Alan}(AFD) = 9$   
 $\text{Alan}(CFE) = 4$   
 $\text{Alan}(ABF) = ?$



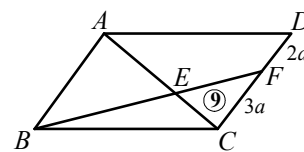
88.

$ABCD$  paralelkenar  
 $|AE| = 5$ ,  
 $|ED| = 4\sqrt{3}$   
 $x + y = 120^\circ$   
 $\text{Alan}(ABCD) = ?$



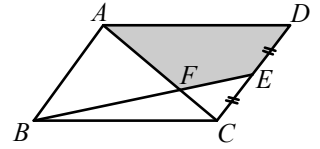
89.

$ABCD$  paralelkenar  
 $|DF|/|FC| = 2/3$   
 $\text{Alan}(EFC) = 9$   
 $\text{Alan}(ABCD) = ?$



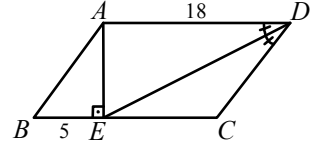
90.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[AC]$  köşegen  
 $[BE]$  kenarortay  
 $\frac{A(AFED)}{A(ABCD)} = ?$



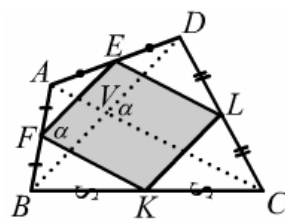
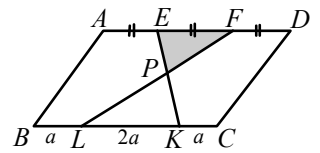
91.

$ABCD$  paralelkenar  
 $[DE]$  açıortay  
 $AE \perp BC$   
 $|BE| = 5$ ,  $|AD| = 18$   
 $\text{Alan}(ABCD) = ?$



92.

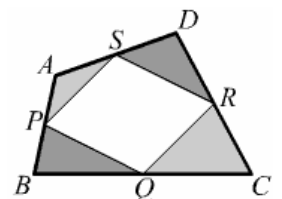
$ABCD$  paralelkenar  
 $|AE| = |EF| = |FD|$   
 $|LK| = 2|BL| = 2|KC|$   
 $\frac{A(EFP)}{A(BCDE)} = ?$

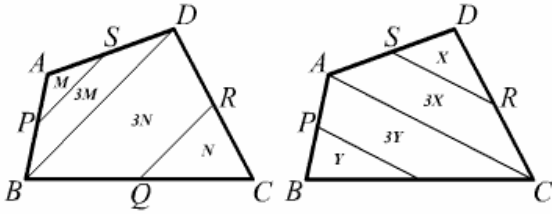


**Teorem [Varignon].** Bir dörtgenin kenar orta noktalarının birleştirilmesi ile oluşan dörtgen daima paralelkenardır. Bu paralelkenarın çevresi dörtgenin köşegenleri toplamına, alanı da dörtgenin alanının yarısına eşittir.

**Kanıt:**  $F$  ve  $E$  orta noktalar olduğundan  $ABD$  üçgeninde  $[EF]$  orta tabandır. Benzer şekilde  $[LK]$ ,  $[EL]$  ve  $[FK]$ 'nin de orta taban olduğunu buluruz. Orta tabanın tabana paralel olduğunu bildiğimizden  $FKLE$  dörtgeni bir paralelkenar olur. Bu paralelkenara **Varignon Paralelkenarı** denir. Diğer yandan  $|FE| = |KL| = |BD|/2$  ve  $|EL| = |FK| = |AC|/2$  olduğundan Varignon paralelkenarının çevresinin  $ABCD$  dörtgeninin köşegenler toplamının yarısı olduğu kanıtlanmış olur. Genel alan formülünden  $\text{Alan}(ABCD) = (1/2) \cdot ef \cdot \sin \alpha$  ve  $\text{Alan}(FKLE) = (1/4) \cdot ef \cdot \sin \alpha$  olduğundan son teorem kanıtlanmış olur. (Jean Pierre Varignon)

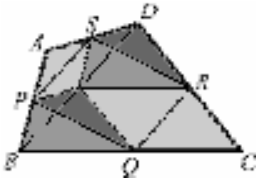
**Teorem.**  $ABCD$  herhangi bir dışbükey dörtgen,  $PQRS$  de bu dörtgenin Varignon paralelkenarı olsun.  $APS$  ve  $CQR$  üçgenlerinin alanları toplamı,  $BPQ$  ve  $DSR$  üçgenlerinin alanları toplamına eşittir.





**Kanıt-1:**  $BAD$  üçgeninde  $PS$  orta taban olduğundan  $\text{Alan}(APS) = M$  ise  $\text{Alan}(BAD) = 4M$  ve  $BCD$  üçgeninde  $QR$  orta taban olduğundan  $\text{Alan}(QCR) = N$  ise  $\text{Alan}(BCD) = 4N$  olur. Yani  $\text{Alan}(ABCD) = 4M + 4N$  dir.

Benzer işlemler sağdaki şekilde yapılsa  $\text{Alan}(ABCD) = 4X + 4Y$  bulunur. O halde  $M + N = X + Y$ .

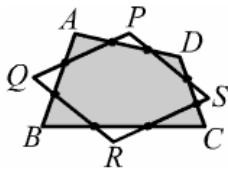
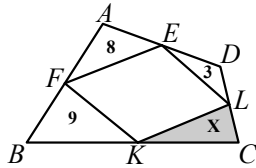


**Kanıt-2:**  $BAD$  üçgeninde  $PS$  orta taban olduğundan  $APS$  üçgeni  $PS$  kenarı üzerine katlanırsa  $A$  noktası  $BD$  köşegeni üzerine düşer.

Bu noktayı  $Q$  ve  $R$  köşeleri ile birleştirirsek oluşan üçgenin de aslında  $CQR$  üçgeni ile aynı alana sahip olduğunu görürüz. Bu iki üçgenin alanları toplamı zaten ortadaki paralelkenarın yarısı olduğundan  $M + N = X + Y$  eşitliği yine kanıtlanmış olur.

93.

$ABCD$  dörtgen  
 $E, F, K, L$  orta noktalar  
 $\text{Alan}(EDL) = 3$   
 $\text{Alan}(EAF) = 8$   
 $\text{Alan}(FBK) = 9$   
 $\text{Alan}(KCL) = X = ?$

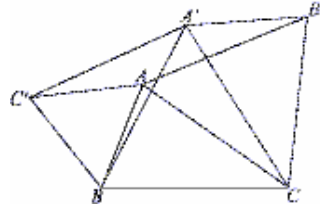


**Teorem [Wittenbauer].** Bir dörtgenin kenarları üçer eşit parçaya bölünsün. Dörtgenin tüm köşelerine en yakın olan noktaların birleştirilmesi ile bir paralelkenar oluşur. Yani; yandaki şekilde  $PQRS$  bir paralelkenardır.

**Kanıt:**  $QP$  ve  $RS$  doğruları Tales Teoremi'nin karşısından  $[BD]$  köşegenine,  $QR$  ve  $PS$  doğruları da yine aynı sebepten  $[AC]$  köşegenine paralel olduğundan kanıt biter.

Bu teoremin genellemesinin yapılabileceğine dikkat ediniz. Yani kenarlar üçe değil,  $n$  gibi başka bir pozitif tamsayıya bölünseydi de yine Tales Teoremi'nden  $PQRS$  bir paralelkenar çıkardı.

**Teorem.**  $A$  açısı  $60^\circ$ 'den büyük olan bir  $ABC$  üçgeninde  $a$  kenarı üzerine üçgenin içine doğru  $BCA'$ ,  $b$  ve  $c$  üzerine de üçgenin dışına doğru  $ABC'$  ve  $ACB'$  eşkenar üçgenleri yerleştirilirse  $AB'A'C'$  dörtgeni bir paralelkenar olur.

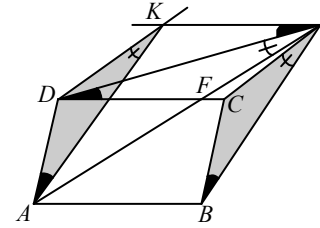


**Kanıt:**  $ABC$  üçgeni saat yönünde  $60^\circ$  döndürülürse  $B'A'C'$  üçgenine dönüşür. Aynı üçgen saat yönünün tersinde  $60^\circ$  döndürülürse  $C'BA'$  üçgenine dönüşür.  $C'A' = AB'$  ve  $A'B' = C'A$  olduğundan yani dörtgenin karşılıklı kenarları eşit olduğundan  $AB'A'C'$  dörtgeni bir paralelkenardır.



**Teorem.** Bir  $ABCD$  paralelkenarının dışındaki bir  $E$  noktası, paralelkenarın köşelerine birleştirilsin.

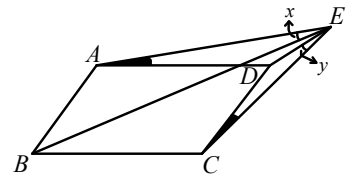
$m(EDC) = m(EBC)$  ise  $m(DEF) = m(CEB)$ 'dir yani  $DFE$  ile  $BCE$  benzerdir.



**Kanıt:**  $DCEK$  paralelkenarını oluşturalım.  $ABEK$  dörtgeninin de bir paralelkenar olacağına dikkat ediniz. Ayrıca  $ECB$  ile  $KDA$  eşittir.  $m(KAD) = m(KED)$  olduğundan  $DAEK$  bir kiriş dörtgenidir. O halde  $m(AED) = m(AKD) = m(BEC)$  olduğundan kanıt bitmiş oldu.

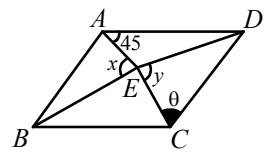
94.

$ABCD$  paralelkenar  
 $m(EAD) = m(DCE)$   
 $m(AED) = x$   
 $m(CED) = y$   
 $x/y$  kaçtır?



95.

$ABCD$  paralelkenar  
 $m(EAD) = 45^\circ$   
 $x + y = 180^\circ$  ise  
 $m(ECD) = \theta = ?$

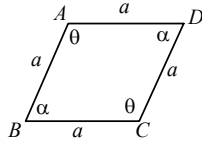


**Eşkenar dörtgenin tanımı.** Bütün kenarları birbirine eşit olan dörtgene *eşkenar dörtgen* denir.

### Eşkenar dörtgende özellikler.

Eşkenar dörtgen özel bir paralelkenar olduğundan paralelkenarın tüm özelliklerini sağlar.

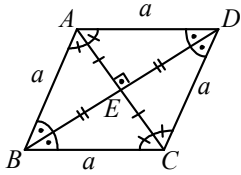
Şekle göre  $AD \parallel BC$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$ ,  $m(B) = m(D) = \alpha$ ,  $m(A) = m(C) = \theta$ ,  $\alpha + \theta = 180^\circ$ .



Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik ortalar.

Köşegenler açıortaydır.

Çevresi  $4a$ , alanı  $ef/2$ 'dir (Köşegenleri dik kesiştiğinden).



Ayrıca paralelkenar gibi düşünerek alanına  $a \cdot h_a$  da diyebiliriz. Hatta buradan ardışık kenarlara inen yüksekliklerin eşit olduğunu da kanıtlamış oluruz. Bunun yanında alan için  $a^2 \cdot \sin A$  formülü de kullanılabilir.

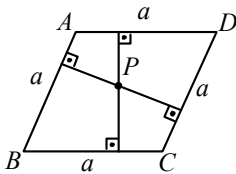
Eşkenar dörtgen bir kiriş dörtgeni değildir ama bir teğet dörtgenidir. Yani çevrel çemberi yoktur ama iç çemberi vardır.

### Eşkenar dörtgende teorem ve formüller.

**Teorem.** Bir eşkenar üçgende köşegenlerin uzunluklarının kareleri toplamı, bir kenar uzunluğunun karesinin 4 katına eşittir. Yani; köşegenleri  $e$  ve  $f$  ile kenarları da  $a$  ile gösterecek olursak;

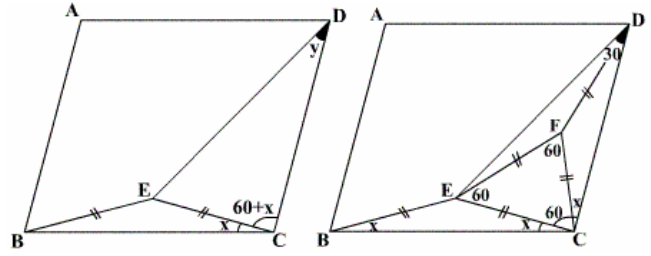
$$e^2 + f^2 = 4a^2.$$

**Kanıt:** Paralelkenarda  $e^2 + f^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$  idi.  $e = f$  ve  $b = a$  olduğundan  $e^2 + f^2 = 4a^2$ .



**Teorem.** Bir eşkenar dörtgenin iç bölgesinde alınacak isteksel bir noktanın tüm kenarlara olan uzaklıklarının toplamı, eşkenar dörtgenin yüksekliğinin 2 katına eşittir.

**Kanıt:** Yan şekildeki gibi bir  $P$  noktası alalım.  $P$  noktasından karşı durumlu kenarlara inilen dikmelerin toplamının tek yüksekliğe eşit olduğuna dikkat edilirse kanıt biter. Zaten eşkenar dörtgende ardışık kenarlar ait yüksekliklerin eşit olduğuna değinilmişti.



**Teorem.**  $ABCD$  eşkenar dörtgeninin iç bölgesinde alınan bir  $E$  noktası için  $|EB| = |EC|$  olup,  $m(DCE) = 60^\circ + m(ECB)$  ise  $m(CDE) = 30^\circ$  dir.

**Kanıt:**  $BEC$  üçgeni soldaki şekillerin sağındaki gibi  $CFD$  üçgeninin yerine kopyalanırsa  $|FC| = |CE|$  ve  $m(FCE) = 60^\circ$  olur ki  $FCE$  bir eşkenar üçgen olur. O halde aynı zamanda  $|EF| = |FD|$ 'dir.  $F$  noktasının  $EDC$  üçgeninin çevrel çember merkezi olduğu görülerek  $CDE$  açısının  $30^\circ$  olduğu gösterilmiş olur.

96.

$ABCD$  eşkenar dörtgen

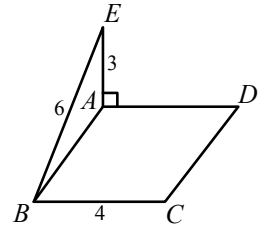
$AE \perp AD$ ,

$|EA| = 3$ ,

$|CB| = 4$ ,

$|BE| = 6$

Alan( $ABCD$ ) = ?



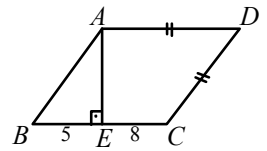
97.

$ABCD$  eşkenar dörtgen

$AE \perp BC$

$|BE| = 5$ ,  $|EC| = 8$

Alan( $ABCD$ ) = ?



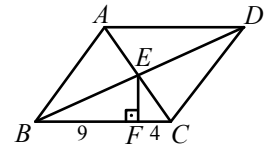
98.

$ABCD$  eşkenar dörtgen

$EF \perp BC$

$|BF| = 9$ ,  $|FC| = 4$

Alan( $ABCD$ ) = ?



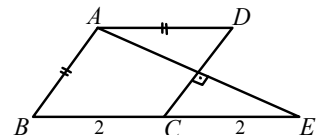
99.

$ABCD$  eşkenar dörtgen

$AE \perp DC$

$|BC| = |CE| = 2$

Alan( $ABCD$ ) = ?



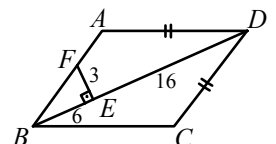
100.

$ABCD$  eşkenar dörtgen

$FE \perp BD$ ,  $|BE| = 6$

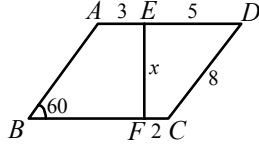
$|EC| = 16$ ,  $|FE| = 3$

Alan( $ABCD$ ) = ?

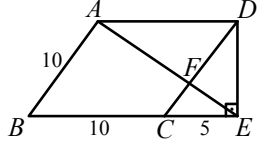


**101.**

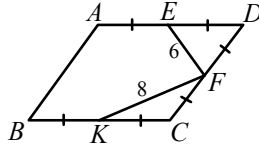
$ABCD$  eşkenar dörtgen  
 $|AE| = 3$ ,  $|ED| = 5$   
 $|FC| = 2$ ,  $m(\angle ABC) = 60^\circ$   
 $|EF| = x = ?$

**102.**

$ABCD$  eşkenar dörtgen  
 $DE \perp BE$   
 $|AB| = 10$ ,  $|CE| = 5$   
 $|AE| = x$  kaçtır?

**103.**

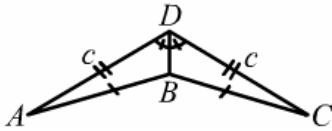
$ABCD$  eşkenar dörtgen  
 $E, F, K$  orta noktalar  
 $|EF| = 6$ ,  $|FK| = 8$   
 $\text{Alan}(ABCD) = ?$



### DELTOİT

**Deltoidin tanımı.** Ardışık kenarları  $a, b, c, d$  olan bir dörtgende  $a = b$  ve  $c = d$  ise dörtgene *deltoid* diyoruz. Yani; tabanları aynı ama kendileri farklı iki ikizkenar üçgenin (yandaki  $ADC$  ve  $ABC$  üçgenleri gibi) tabanlarından yapıştırılmış bir şekil. O halde ikizkenar üçgenin özelliklerine sık rastlayacağımızı öngörebiliriz.

**Deltoidin özellikleri.** Köşegenler dik kesişir. Köşegenler dik kesiştiği için de alanı  $(1/2).e.f$  dir. Köşegenlerin kesişim noktası, köşegenin birini ortalar ama diğerini ortalamaz. Bunun yanında köşegenlerin biri açıortaydır ama diğeri değildir. İkizkenar üçgenlerin yüksekliği olan doğru ( $DB$ ) deltoidin simetri eksenidir. Deltoid bir teğetler dörtgenidir ama kiriş dörtgeni değildir.



şan yeni şekle (soldaki şekil) *konkav (içbükey) deltoid* denir.

**Konkav deltoid.** Üstteki şekilde  $ABC$  üçgeni  $[AC]$  kenarı üzerinden katlanırsa oluş-

DEVAM EDECEK...