

BAĞINTI – FONKSİYON

1. Sıralı İkili

- (a,b) şeklindeki ifadelere denir.
a : 1. bileşen
b : 2. bileşen
- (a,b,c) : sıralı üçlü
- $(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots,x_n)$: sıralı n'li
- $(a,b) = (x,y) \Rightarrow a = x ; b = y$
- $(a,b) = (b,a) \Rightarrow [a \neq b]$

2. Kartezyen Çarpım

- A ve B boş olmayan iki küme olmak şartıyla 1. bileşen A' dan , 2. bileşen B' den yazılarak oluşturulan tüm sıralı ikililere A kartezyen çarpım B kümesi denir.

- $A \times B = \{ (A,B) \mid a \in A , b \in B \}$
- $A \times B \neq B \times A$
- $A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $A \times \phi = \phi$
- $s(A \times B) = s(B \times A) = s(A) \cdot s(B)$
- $A \times A = A^2 \quad A \times A \times A = A^3$
 $R \times R = R^2 \quad R \times R \times R = R^3$
(Analitik düzlem) (öklid uzayı)

3. Bağntı

- A ve B boş olmayan iki küme olsun. $A \times B$ kümesinin yazılabilecek tüm alt kümelerinin her birine A' dan B' ye bir bağntı denir.

$$\beta = \{(x,y) \mid (x,y) \subset A \times B\}$$

- A' dan B' ye yada B' den A' ya bağntı sayısı $2^{s(A \times B)}$ dir.
- A' dan A' ya bağntıya A' da bağntı denir.
- $\beta = \phi$ de bir bağntıdır.

4. Ters Bağntı

- $\beta = \{(x,y) \mid x \in A , y \in B\} \quad (\beta \subset A \times B)$
 $\beta^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in \beta\} \quad (\beta^{-1} \subset A \times B)$
- β ve β^{-1} lerin analitik düzlemde gösterimi köşegene göre simetriktir.

5. Bağıntının özellikleri

YANSIMA ÖZELLİĞİ

- $\forall x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ ise β yansıyandır.
- Analitik düzlemde ($\Delta =$ köşegen) $\Delta \in \beta$ ise β yansıyandır.

SİMETRİ ÖZELLİĞİ

- $\forall (x,y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ ise β simetriktir.
- Analitik düzlemde β simetrik ise β ve β^{-1} aynı kümededir.
- Analitik düzlemde β ; Δ' e göre simetrik ise β simetriktir.

TERS – SİMETRİ ÖZELLİĞİ

- $x \neq y$ ve $(x,y) \in \beta$ için $(y,x) \notin \beta^{-1}$ ise β ters-simetriktir.
- β simetrik değilse ters – simetriktir denilemez.

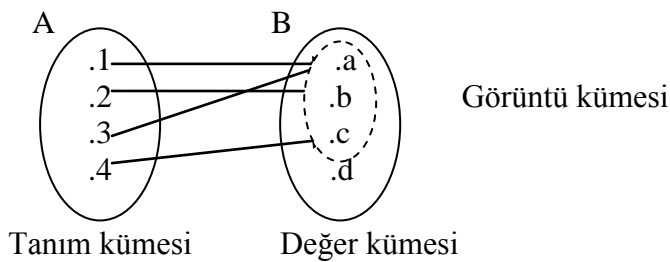
GEÇİŞKEN ÖZELLİĞİ

- $\forall (x,y) \in \beta$ ve $\forall (y,z) \in \beta$ iken $(x,z) \in \beta$ ise β geçişkendir.

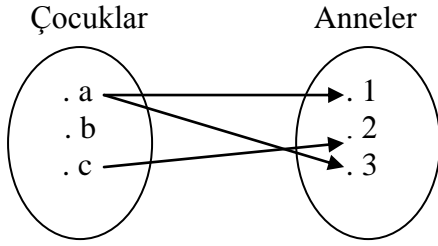
NOT : Eğer β yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahipse β' ya denklik bağıntısı ; eğer β yansıma, ters-simetri ve geçişme özelliklerine sahipse β' ya sıralama bağıntısı denir.

FONKSİYON

- A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere f ; A'dan B' ye bir bağıntı olsun.
- f bağıntısının fonksiyon olabilmesi için
 1. $\forall x \in A$ için $\exists y \in B$ ve $(x,y) \in f$ olmalıdır. Yani A kümesinde (=tanım kümesinde) açıkta eleman kalmamalıdır ama B kümesinde açıkta eleman kalabilir.
 2. $(x,y) \in f$ ve $(x,z) \in f$ ise $y = z$ olmalıdır. Yani A kümesinin her elemanı B kümesinde yalnız bir elemana gidebilir.



NOT : Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için gerekli şartları akılda tutmak için aşağıdaki yöntem düşünülebilir.



1. Bir çocuğun iki annesi olamaz.
(a ; aynı anda hem 1'e hem 3'e gidemez.)
2. Annesiz çocuk olmaz.
(Yani kısacası çocuklar kümesinde açıkta eleman kalmamalı.)

EŞİT FONKSİYON

- Görüntü kümeleri eşit olan fonksiyonlardır.
- $f : A \longrightarrow B$ $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g eşit fonksiyonlardır.
 $g : A \longrightarrow B$

TEK FONKSİYON

- $\forall x \in R$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f 'ye tek fonksiyon denir.
- $\forall x \in R$ için $f(-x) = f(x)$ ise f 'ye çift fonksiyon denir.
- Bir fonksiyonun tek yada çift olma zorunluluğu yoktur.

FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

1. BİRİM FONKSİYON

- $f(x) = x$ fonksiyonuna denir.
 - A
-

2. SABİT FONKSİYON

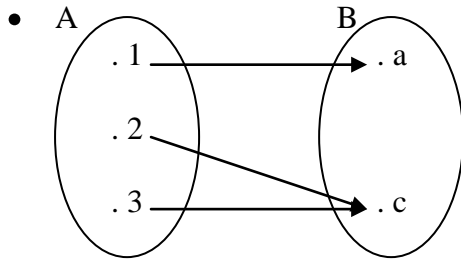
- $f(x) = c$ fonksiyonuna denir.
 - A
-

3. İÇİNE FONKSİYON

- Değer kümesinde en az bir elemanın açıkta kaldığı fonksiyona denir.
 - A
-

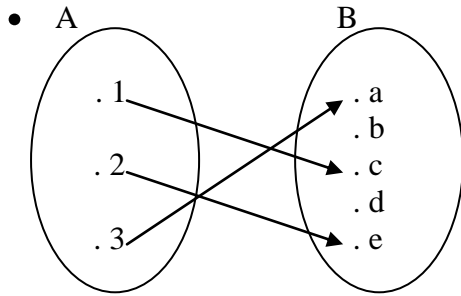
4. ÖRTEN FONKSİYON

- Değer kümesinde açıkta elemanın kalmadığı fonksiyonlara denir.

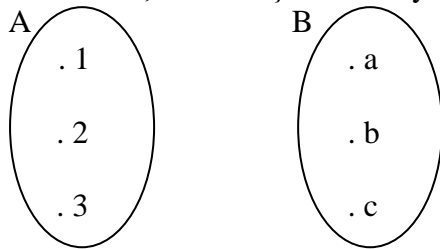


5. BİREBİR FONKSİYON

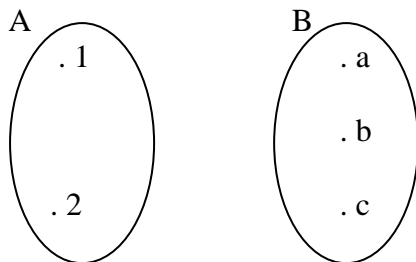
- Tanım kümesinin her bir elemanının görüntüleri farklı olan fonksiyonlara denir.



- Hem 1 – 1, hem de örten fonksiyona 1 – 1 örten fonksiyon denir.
- Hem 1 – 1, hem de içine fonksiyona 1 – 1 içine fonksiyon denir.



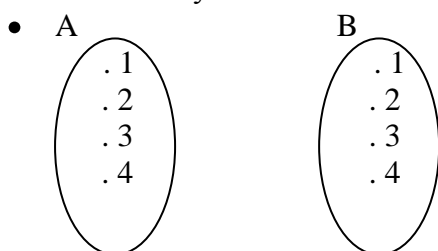
1 – 1 örten fonksiyon



1 – 1 içine fonksiyon

6. PERMÜTASYON FONKSİYON

- A' dan A' ya tanımlı 1 – 1 ve örten fonksiyonlara denir.



$$F : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

FONKSİYON SAYISI

$$S(A) = m \quad s(B) = n$$

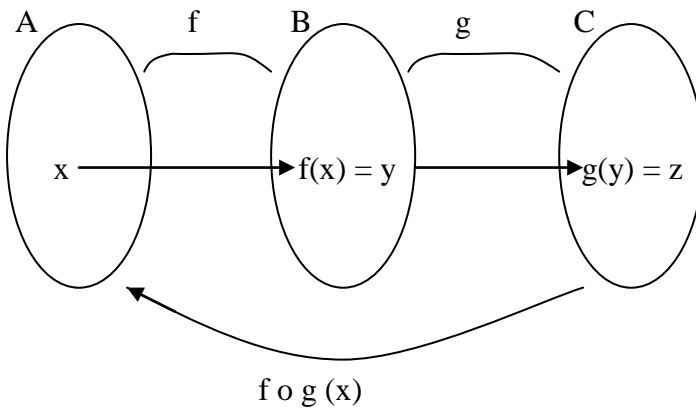
- A' dan B' ye yazılabilen bağıntı sayısı $2^{m \cdot n}$
- A' dan B' ye yazılabilen fonksiyon sayısı n^m
- A' dan B' ye yazılabilen fonksiyon olmayan bağıntı sayısı $2^{m \cdot n} - n^m$
- A' dan B' ye yazılabilen 1 – 1 fonksiyon sayısı $n \geq m$ $\frac{n!}{(n-m)!}$ dir.
- A' dan B' ye yazılabilen sabit fonksiyon sayısı n' dir.
- A' nın permütasyonlarının sayısı (A' dan A' ya 1 – 1 ve örten fonksiyon sayısı) $m!$ dir.

TERS FONKSİYON

- $f = \{(x,y) : f \subset A \times B\}$ ise f fonksiyonunun tersi $f^{-1} = \{(y,x) : f^{-1} \subset B \times A\}$ dir.
- Her fonksiyonun tersi vardır,ama tersi fonksiyon olmayabilir.
- f fonksiyonunun tersinin de fonksiyon olabilmesi için, f fonksiyonunun 1 – 1 ve örten olması gerekir.

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad f(x) = a \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{c \cdot x - b}{a}$
- $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} : \left\{ \frac{a}{c} \right\} \quad \text{ve} \quad f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} \quad \Rightarrow$
- $f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} : \left\{ \frac{-d}{c} \right\} \quad \text{ve} \quad f^{-1}(x) = \frac{-d \cdot x + b}{c \cdot x - a}$
- $f(x) = y$ ile $f^{-1}(x) = y$ fonksiyonlarının görüntüleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

BİLEŞKE FONKSİYON



- $f : A \longrightarrow B$
- $g : B \longrightarrow C$
- $f \circ g : C \longrightarrow A$
- $f \circ g(x) : f(g(x))$
- $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$
- $f \circ g(x) = g \circ f(x) \Rightarrow$
 1. $f(x) = g(x)$ dir veya
 2. f veya g' den birisi mutlaka birim fonksiyondur.
- $f \circ I = I \circ f = f$ (I = birim fonksiyon)
- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$
- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$