

# PERMÜTASYON, KOMBİNASYON, BİNOM AÇILIMI VE OLASILIK

LİSE MATEMATİK - KONU: 7

## • BİLİYOR MUSUN?

- ✓ Sayma yöntemleri ve faktöriyel fonksiyonu!
- ✓ Permütasyon, dönele permütasyon ve tekrarlı permütasyon!
- ✓ Kombinasyon, binom açılımı ve Paskal üçgeni!
- ✓ Olasılık ve koşullu olasılık!

- **SAYMA YÖNTEMLERİ:** Matematikte, sayma işlemini üç farklı şekilde gerçekleştiririz:
1. Nesneleri sayma sayıları kümesi elemanlarına (sırayla) eşlemek suretiyle yapılan sayma işlemine **BİRE BİR EŞLEME YOLUYLA SAYMA** adı verilir.
  2. Ayrık kümelerin bileşiminin eleman sayısını, ayrık kümelerin eleman sayılarını toplayarak bulmaya **TOPLAMA YOLUYLA SAYMA** adı verilir.
  3. Bir işin ilk ayağı  $a_1$  farklı şekilde, ikinci ayağı  $a_2$  farklı şekilde, . . . n. ayağı  $a_n$  farklı şekilde yapılabilirse bu iş toplam  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  farklı şekilde yapılabilir. İş sayısını bu şekilde elde etmeye **ÇARPMA YOLUYLA SAYMA** adı verilir.
- **FAKTÖRİYEL FONKSİYONU:** Doğal sayılar kümesinde 1'den  $n$ 'ye kadar olan sayıların çarpımına  $n$  sayısının faktöriyel fonksiyonu adı verilir ve  $n!$  şeklinde gösterilir.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Negatif sayıların faktöriyel fonksiyonu tanımlanmamıştır. Sıfır ve 1 sayılarının faktöriyel fonksiyonlarının değeri 1'dir:

$$0! = 1 \quad 1! = 1$$

✍ Faktöriyel ifadeler içeren denklemlerin çözümünde faktöriyel fonksiyonunun açılımından faydalanılır.

✍  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$  denklemini çözmek için faktöriyel ifadelerin açılımını yaparız:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} &= 56 \\ \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} &= 56 \\ (n+1)n &= 8 \cdot 7 \Rightarrow n = 7 \end{aligned}$$

- **PERMÜTASYON:** Belli sayıdaki nesnenin birbirinden farklı dizilimlerine nesnelerin **PERMÜTASYONU** adı verilir.  $n$  tane nesnenin birbirinden farklı dizilimlerinin toplam sayısı  $P(n, n)$  şeklinde gösterilir ve

$$P(n, n) = n!$$

bağıntısı ile hesaplanır.

✍ Aynı renkten kitaplar yan yana gelmemek koşuluyla, 4 kırmızı ve 4 beyaz kitabın kaç farklı şekilde dizilebileceğini bulalım.

**ÇÖZÜM 1:** Aynı renkten kitaplar yan yana gelmeyeceklerine göre, aynı renk olan kitaplar kendi aralarında dizilecek ve bir tarağın dişleri gibi diğerlerinin arasına konacaktır. Öyleyse beyazlar kendi aralarında  $4! = 24$ , kırmızılar kendi aralarında  $4! = 24$  farklı şekilde dizileceğine göre,  $24 \cdot 24 = 576$  farklı şekilde dizilebilirler. İlk kitabın kırmızı veya beyaz olması ihtimali de düşünülürse farklı dizilim sayısının  $576 \cdot 2 = 1152$  olduğu görülür.

**ÇÖZÜM 2:** Bu çözüm, ilk çözümün mantığını pekiştirmesi için verilmiştir.

İlk kitabın kırmızı olduğunu düşünelim. Bu kitap 4 farklı kitap arasından seçilebilir. İkinci kitap beyazdır ve yine 4 farklı kitap arasından seçilecektir. Üçüncü kitap kırmızıdır ve geriye kalan 3 kırmızı kitap arasından seçilebilir. Bu mantıkla devam edildiğinde toplam sayının

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1152$$

$$2(4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1) = 1152$$

$$2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$$

olduğu görülür. Toplanan ikinci terim, sıralamaya beyaz kitapla başlanması halini göstermektedir.

○ TAKIM PERMÜTASYONLARI:  $n$  elemandan elde edilebilecek, birbirinden farklı  $r$ 'li dizilimlerin sayısı  $P(n, r)$  şeklinde gösterilir ve

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (r \leq n)$$

bağıntısı ile hesaplanır.

İkisi kaleci olan 16 kişilik kadrodan 11 kişilik futbol takımının kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini bulalım.

Takımdaki 11 kişiden biri kaleci olacaktır ve bu seçim sadece 2 türlü yapılabilir, çünkü toplam 2 kaleci vardır. Takımın geri kalan 10 elemanı kaleci olmayan 14 kişi içinden seçilecektir. Buna göre, 10 kişinin seçimi

$$P(14, 10) = \frac{14!}{10!} = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 24024$$

farklı şekilde yapılabilir. Kaleci için iki farklı seçenek olduğu da düşünülürse 11 kişilik takım

$$2 \cdot 24024 = 48048$$

farklı şekilde seçilebilecektir.

○ DÖNEL PERMÜTASYONLAR:  $n$  sayıdaki elemanın, bir masa etrafına oturmaları gibi dizilimlerin birbirinden farklı algılanabilmesi için elemanlardan birinin yerinin sabit kabul edilmesi gerekir. Buna göre, farklı dizilimlerin sayısı  $(n-1)$  elemanın farklı dizilimlerinin sayısına eşit olacaktır.

Her zaman 2 kız öğrencinin yanına 3 erkek öğrenci gelmek koşuluyla, 8 kız ve 12 erkek öğrencinin bir yuvarlak masa etrafına kaç farklı şekilde oturabileceğini bulalım.

Öğrencilerin tamamı oturacağı, diğer bir deyişle takım seçilmeyeceği için kızlar kendi aralarında  $8!$ , erkekler kendi aralarında  $12!$  farklı şekilde sıralanabilirler. Bu durumda toplam dizilim  $8! \cdot 12!$  olacaktır. Öğrenciler, 2 kız 3 erkek olmak üzere, beşer kişilik toplam 4 grup oluştururlar. Bu 4 grup bir yuvarlak masa etrafında  $3!$  farklı şekilde oturabilir. Öyleyse toplam farklı dizilim sayısı  $3! \cdot 8! \cdot 12!$  olacaktır.

• Dönel permütasyonlarda grupların kızlarla mı erkeklerle mi başladığına bakılmaz.

○ TEKRARLI PERMÜTASYONLAR:  $n$  elemandan bazıları birbiriyle aynı ise farklı dizilimlerin sayısı tekrarlı permütasyon ile bulunur.  $r_1, r_2, \dots$  tanesi birbiri ile aynı olan  $n$  elemanın tekrarlı permütasyonlarının sayısı

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots} \quad (r_1 + r_2 + \dots \leq n)$$

bağıntısı ile bulunur.

"BEŞEBEŞ" kelimesinin harflerini kullanarak, E harfi ile başlayan ancak E harfi ile bitmeyen, anlamlı veya anlamsız, 7 harfli kaç kelime yazılabileceğini bulalım.

Kelimeler E harfi ile başlayacağına göre, dizilecek olan 6 harf vardır. Kelimeler E harfi ile bitmeyeceğine göre, son harf 4 harf arasından

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

farklı şekilde seçilebilir. Arada kalan 5 harf ise 2 E, 2 B ve 1 Ş ya da 2 E, 2 Ş ve 1 B arasında dizilecektir. Buna göre

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

farklı dizilim yapılabilir. Öyleyse toplam  $30 \cdot 6 = 180$  farklı kelime yazılabilir.

➤ **KOMBİNASYON:** Belli sayıdaki nesneden elde edilen, birbirinden farklı gruplara nesnelerin **KOMBİNASYON**ları adı verilir.

Kombinasyonların farklı olması sıralamaya değil, eleman farkına dayanır: aynı elemanların farklı sıralaması aynı kombinasyonu ifade eder.

$n$  elemanla oluşturulabilecek  $r$  elemanlı farklı grupların sayısı  $C(n, r)$  veya  $\binom{n}{r}$  şeklinde gösterilir ve

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

bağıntısı ile hesaplanır.

✍ Altı kişilik personelden 2 kişilik bir ekip

$$C(6, 2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

farklı şekilde seçilebilir.

✍ Permütasyonda sıralamanın önemi vardır, kombinasyonda sıralama önemsizdir.

✍ Sekiz seçmeli dersten 3 tanesi aynı saatlerde verildiğine göre, bir öğrencinin 2 seçmeli dersi kaç farklı şekilde seçebileceğini bulalım.

• Bu soruyu bir permütasyon sorusu değil de bir kombinasyon sorusu yapan fark, seçilecek derslerin herhangi bir sıralamaya tabi olmamalarıdır. İki dersten hangisinin birinci olduğunun önemi yoktur.

Sekiz dersten üçü aynı saatte verildiğine göre bu üç dersten sadece biri seçilebilir. Öyleyse seçim altı dersten ikisini seçmek işlemidir:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

Aynı saatte verilen üç dersten biri 3 farklı şekilde seçilebileceğine göre, toplam farklı seçim miktarı  $3 \cdot 15 = 45$  olacaktır.

➤ **BİNOM AÇILIMI:**  $x$  ve  $y$  birer gerçel sayı,  $n$  bir doğal sayı olmak üzere,

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{r} x^{n-r} y^r + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

özdeşliği **BİNOM AÇILIMI** olarak adlandırılır.

#### BİNOM AÇILIMININ ÖZELLİKLERİ

1.  $n + 1$  terim vardır.
2. Her terimde  $x$  ve  $y$  çarpanlarının üsleri toplamı  $n$ 'dir.
3. Baştan  $k + 1$ . veya  $x^{n-k}$ lı çarpan barındıran veya  $y^k$ lı çarpan barındıran terimin ifadesi  $\binom{n}{k} x^{n-k} y^k$  şeklindedir.

✍  $(x + y)^5$  ifadesinde  $x^3$  çarpanlı terimin katsayısını bulmak için  $5 - k = 3$  ise  $k = 2$  olduğunu düşünerek

$$\binom{5}{2} x^3 y^2 = \frac{5!}{2!3!} x^3 y^2 = 10 x^3 y^2$$

yazarız. İstenen katsayı 10'dur.

✍  $\left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)^8$  ifadesinin açılımında sabit terimin değerini bulalım.

Verilen ifadeyi  $(x^2 + 2x^{-2})^8$  şeklinde yazalım. Sabit terimde  $x$  değişkeni bulunmayacağına göre,

$$\binom{8}{k} (x^2)^{8-k} \cdot (2x^{-2})^k = \binom{8}{k} 2^k x^{16-4k} x^{-2k} = \binom{8}{k} 2^k x^{16-4k}$$

teriminde  $k = 4$  olmalıdır. Buna göre, sabit terimin değeri 1120 olur:

$$\binom{8}{4} 2^4 = \frac{8!}{4!4!} \cdot 16 = 70 \cdot 16 = 1120$$



- **PASKAL ÜÇGENİ:** Binom açılımında  $n$  kuvveti büyüdükçe terimlerin katsayılarını hesaplamak yorucu olacaktır. Bu işi kolaylaştırmak için Paskal üçgeninden faydalanırız. Aşağıda Paskal üçgeninin ilk beş satırı verilmiştir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 
 \end{array}$$

Paskal üçgeninin  $n$ . satırı,  $(x + y)^n$  iki terimlisine ait binom açılımının  $x$ 'in azalan kuvvetlerine göre katsayılarını vermektedir.

#### PASKAL ÜÇGENİNİN OLUŞTURULMASI

1. İlk satıra iki tane 1 yazılır.
2. İkinci satırın başına, düşey hizalamada ilk satırın başındaki 1'in solunda kalacak şekilde 1 yazılır. Ardından ilk satırdaki iki tane 1 toplanır ve toplamın sonucu olan 2 düşey hizalamada ilk satırdaki iki 1'in ortasına gelecek şekilde yazılır. Satırın sonuna 1 yazılır.
3. Üçüncü satırın başına, düşey hizalamada ikinci satırın başındaki 1'in solunda kalacak şekilde 1 yazılır. İkinci satırın başındaki 1 ile 2 toplanır, toplamın sonucu olan 3 düşey hizalamada ikinci satırdaki 1 ile 2'nin ortasına gelecek şekilde yazılır. Satırın sonuna 1 yazılır.
4. Diğer satırların tamamı şu şekilde oluşturulur:
  - Satırın başına üst satırın başındaki 1'in solunda kalacak şekilde 1 yazılır.
  - Herhangi bir eleman, düşey hizalamada üst satırdaki iki elemanın arasına gelecek şekilde yazılır ve değeri ortasına geldiği elemanların toplamıdır.
  - Her satırın sonuna 1 yazılır.

✍  $\binom{n}{r}$  kombinasyonunun değeri, Paskal üçgeninde  $n$ . satır,  $(r + 1)$ . sütundaki elemana eşittir.

✍  $\binom{5}{3}$  kombinasyonunun değerini Paskal üçgeninin 5. satırının 4. elemanına bakarak bulabiliriz: 10. Sağlamasını yaparsak:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

#### KOMBİNASYON İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

Paskal üçgenine bakarak kombinasyon işleminin şu özellikleri görülebilir:

1.  $C(n, r) = C(n, n - r)$
2.  $C(n, 0) = C(n, n) = 1$
3.  $C(n, 1) = C(n, n - 1) = n$
4.  $C(n, r - 1) + C(n, r) = C(n + 1, r)$
5.  $C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n - 1) + C(n, n) = 2^n$

- **OLASILIK:** Bir deneyden elde edilebilecek sonuçların, elde edilebilme ihtimallerini incelenmesine **OLASILIK HESABI** adı verilir.

Yapılan bir deneyin elde edilebilecek sonuçlarının oluşturduğu kümeye **ÖRNEKLEM UZAY** denir ve  $E$  harfiyle gösterilir. Örneklem uzayın her bir elemanı **ÖRNEKLEM NOKTA**, her bir alt kümesi ise **OLAY** olarak adlandırılır.

✍ Bir zar atıldığında gelebilecek olan sayıların oluşturduğu  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  kümesi örneklem uzay; 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 değerlerinden her biri bir örneklem nokta;  $E$  kümesinden elde edilebilecek  $2^6 = 64$  alt kümenin her biri olay olarak adlandırılır.

Örneklem uzayın boş alt kümesine **İMKANSIZ OLAY**, örneklem uzayın kendisine ise **KEŞİN OLAY** denir.

✍ Bir zar atıldığında  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  kümesinin bir elemanının gelmesi kesin olay, hiçbir sayı gelmemesi ise imkansız olaydır.

Örneklem uzayın ayrık alt kümelerine **AYRIK OLAYLAR** adı verilir.

Bir  $A$  olayının gerçekleşmesi olasılığı **OLASILIK FONKSİYONU** ile ifade edilir. Olasılık fonksiyonu  $P(A)$  şeklinde gösterilir.

Her bir örneklem noktasının olasılıkları eşit olan örneklem uzaya **EŞ OLASILIKLI ÖRNEKLEM UZAY** adı verilir. Eş olasılıklı örneklem uzayda bir  $A$  olayının olasılığı

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$$

fonksiyonu ile ifade edilir.

Ayrık olayların aynı anda gerçekleşme olasılığı

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

bağıntısıyla bulunur.

İki tanesi mavi, 4 tanesi sarı, 9 tanesi kırmızı olan bilyelerin bulunduğu bir torbadan rastgele seçilen 2 bilyeden birinin kırmızı diğerinin mavi olması olasılığını bulalım.

**ÇÖZÜM 1:** Torbadaki 15 bilye,  $\binom{15}{2} = 105$  farklı şekilde ikiye bölünebilir. Diğer yandan 2 mavi 9 kırmızı bilye ile  $2 \cdot 9 = 18$  farklı ikili grup oluşturulabilir. Buna göre, torbadan rastgele çekilen iki bilyeden birinin mavi birinin kırmızı olması olasılığı  $\frac{18}{105}$  şeklindedir.

**ÇÖZÜM 2:** Torbada 15 bilye bulunduğuna göre çekilen ilk bilyenin mavi olması olasılığı  $\frac{2}{15}$ , ikinci bilyenin kırmızı olması olasılığı  $\frac{9}{14}$  şeklindedir. Benzer şekilde ilk bilyenin kırmızı, ikinci bilyenin mavi çıkma olasılıkları da, sırasıyla,  $\frac{9}{15}$  ve  $\frac{2}{14}$  şeklindedir. Öyleyse birinci halin olasılığı  $\frac{2}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{35}$ , ikinci halin olasılığı  $\frac{9}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{3}{35}$ , toplam olasılık ise  $\frac{6}{35}$  olacaktır.

#### OLASILIK FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ

1. İmkansız olayın olasılık fonksiyonunun değeri 0, kesin olayın olasılık değeri 1'dir.

$$P(\emptyset) = 0 \quad \text{ve} \quad P(E) = 1$$

2. Örneklem uzaydaki herhangi bir  $A$  olayının olasılık fonksiyonunun değeri  $0 \leq P(A) \leq 1$  şeklindedir.

3.  $A$  ve  $B$  olaylarından herhangi birinin gerçekleşmesi olasılığı  $P(A \cup B)$  değeri

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

bağıntısı ile hesaplanır.

Bir sınıfın %12'si tarihten, %17'si coğrafyadan, %4'ü ise her iki dersten de başarısız olduğuna göre, rastgele seçilecek bir öğrencinin bu derslerin en az birinden başarısız olması olasılığını bulalım.

Öğrencinin en az birinden başarısız olması olasılığı  $P(A \cup B)$  ile gösterilirse

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,12 + 0,17 - 0,04 = 0,25$$

değeri elde edilir.

Bir  $B$  olayı gerçekleştikten sonra bir  $A$  olayının gerçekleşebilme olasılığına " $A$  olayının,  $B$  olayına bağlı koşullu olasılığı" adı verilir,  $P(A|B)$  şeklinde gösterilir ve

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bağıntısı ile hesaplanır.

Bir sınıfın %22'si kimya, %18'i biyoloji, %9'u ise her iki dersten de başarısız olmuştur. Rastgele seçilen bir öğrencinin biyoloji dersinden başarısız olduğunu bildiğimize göre, bu öğrencinin kimya dersinden de başarısız olma olasılığını hesaplayalım.

Koşullu olasılık bağıntısına göre,

$$P(A|B) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

yazabiliriz.