

# MATRİSLER DETERMINANTLAR

LİSE MATEMATİK - KONU: 12

## • BİLİYOR MUSUN?

- ✓ Matris, kare matris, köşegen matris, üçgen matris!
- ✓ Matrislerde eşitlik ve işlemler, devrik matris!
- ✓ Doğrusal denklem sistemleri, temel satır ve sütun işlemleri!
- ✓ Minör, kofaktör, determinantlar, Sarrus yöntemi, ek matris!
- ✓ Cramer yöntemi!

➤ **MATRİS:** Belli miktarda değer, düzen gözetilerek yatay ve düşey diziler halinde sıralandığı değer tablolarına genel olarak **MATRİS** adı verilir. Aşağıda bir matris örneği görülmektedir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Matrisler, alfabenin harfleri ile adlandırılırlar. Yukarıdaki örnekte verilen matris A matrisidir.
- Matrisler genellikle yay parantezlerle gösterilir/sınırlanırlar. Ancak bazı kaynaklarda köşeli parantez de kullanılmaktadır.
- Matrislerin yatay dizilerine **SATIR**, düşey dizilerine **SÜTUN** adı verilir. Yukarıda verilen örnek matrisin üç satırı ve üç sütunu vardır.
- m adet satır, n adet sütundan oluşan bir matrisin türü m × n olarak belirtilir ve bu matris kısaca  $(a_{ij})_{m \times n}$  şeklinde gösterilir. Yukarıdaki örnek matris  $(3 \times 3)$  türünde bir matristir ve  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$  şeklinde yazılabilir.

- Matrisin elemanları, matris içindeki yerleri ile belirlenirler. Buna göre, bir matrisin i. satırında ve j. sütununda bulunan bir a elemanı  $a_{ij}$  şeklinde gösterilir. Bu gösterimde satırlar yukarıdan aşağı, sütunlar soldan sağa doğru sayılır.

✍  $2 \times 3$  türündeki  $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$  matrisinin elemanları

$$p_{11} = 1 \quad p_{12} = 4 \quad p_{13} = 6 \quad p_{21} = 2 \quad p_{22} = 2 \quad p_{23} = 7$$

şeklinde yazılır.

- Tüm elemanları sıfır olan matrislere sıfır matris adı verilir. Aşağıdaki örnekte görülen B matrisi,  $2 \times 4$  türünde bir sıfır matrisidir.
- Satır ve sütun sayısı eşit olan matrislere **KARE MATRİS** adı verilir. Yukarıdaki örnekte yer alan A matrisi bir kare matristir.
- Bir kare matriste  $i = j$  olmak üzere  $a_{ij}$  elemanları matrisin **ASAL KÖŞEĞENİ**ni oluştururlar. Aşağıda, yukarıdaki örnekte yer alan A matrisinin asal köşegeni görülmektedir.
- Bir (kare) matriste asal köşegen üzerinde bulunmayan tüm elemanlar sıfır ise bu matrise **KÖŞEĞEN MATRİS** denir. Aşağıda görülen C matrisi  $3 \times 3$  türünde bir köşegen matristir.
- Bir köşegen matriste, köşegen üzerindeki tüm değerler 1 ise bu matrise **BİRİM MATRİS** adı verilir. Birim matris I şeklinde gösterilir. Aşağıda görülen D matrisi  $3 \times 3$  türünde bir birim matristir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Bir kare matriste, asal köşegenin altındaki tüm sayılar sıfır ise bu matrise **ÜST ÜÇGEN MATRİS**; asal köşegenin üstündeki tüm sayılar sıfır ise **ALT ÜÇGEN MATRİS** adı verilir.

Aşağıda verilen E matrisi üst üçgen, F matrisi alt üçgen matristir.

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ 0 & e_{22} & e_{23} \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$  ve  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  matrislerinde her  $i$  ve  $j$  değeri için  $a_{ij} = b_{ij}$  oluyorsa bu iki matris eşittir denir ve  $A = B$  şeklinde gösterilir.

*Aşağıda verilen matrisler eşit olduğuna göre,  $x$  ve  $y$  değerlerini bulalım.*

$$A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ y+1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} y-2 & 4 \\ y+1 & x-3 \end{pmatrix}$$

Matrislerde eşitliğin tanımına göre

$$x = y - 2 \quad 4 = 4 \quad y + 1 = y + 1 \quad 3 = x - 3$$

olmalıdır. Öyleyse  $x = 6$  ve  $y = 8$  olacaktır.

- **MATRİSLERDE İŞLEMLER:** Bir matrisi bir  $k$  gerçekte sayı ile çarpmak için, matrisin tüm elemanları  $k$  sayısı ile çarpılır.

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m \times n}$$

*Aşağıda  $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$  olduğuna göre  $A$  matrisini  $(-4)$  ile çarpalım:*

$$\begin{aligned} (-4) \cdot A &= (-4) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-4) \cdot 7 & (-4) \cdot 4 & (-4) \cdot (-3) \\ (-4) \cdot 1 & (-4) \cdot 6 & (-4) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & -16 & 12 \\ -4 & -24 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bir matrisin bir gerçekte sayı ile çarpımında:

1. Matrisin türü değişmez.
2. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği geçerlidir. Yani  $k$  ve  $t$  birer gerçekte sayı,  $A$  ve  $B$  birer matris olmak üzere,

$$k(A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

$$(k + t)A = k \cdot A + t \cdot A$$

yazılabilir.

3. Çarpmanın birleşme özelliği geçerlidir. Yani  $k$  ve  $t$  birer gerçekte sayı,  $A$  bir matris olmak üzere,

$$(k \cdot t)A = k(t \cdot A)$$

yazılabilir.

$A$  ve  $B$  aynı türden iki matris ise bu iki matris arasında toplama ve çıkarma işlemleri

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})$$

şeklinde tanımlanır.

*Aynı türden olmayan matrisler arasında toplama ve çıkarma işlemleri tanımlanmamıştır.*

*Aşağıda  $A = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  ve  $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  matrislerinin toplam ve farkını bulalım.*

*Her iki matris de aynı türden oldukları için toplama ve çıkarma işlemini gerçekleştirebiliriz.*

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 12 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 4 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

### MATRİSLERDE TOPLAMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

A, B ve C türdeş matrisler olmak üzere, matrislerde toplama işleminin:

1. Değişme özelliği vardır:  $A + B = B + A$
2. Birleşme özelliği vardır:  $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. Aynı türdeki sıfır matrisi toplama işlemine göre etkisiz elemandır.
4. Her matrisin tersi vardır.  $(-1) \cdot A$  matrisine, A matrisinin toplamaya göre ters matrisi adı verilir ve  $-A$  şeklinde gösterilir.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$  ve  $B = (b_{ij})_{n \times p}$  matrisleri arasında çarpma işlemi

$$A \cdot B = C \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

şeklinde tanımlanır.  $A \cdot B$  çarpımında, çarpan A matrisinin sütun sayısı ile çarpılan B matrisinin satır sayısı eşit olmalıdır. Aksi halde çarpma işlemi tanımsızdır.

✓ *Matrislerin çarpılması oldukça karmaşık bir işlemdir ve tanımları matematik notasyona çok hakim olmayı gerektirir. Bu nedenle öğrenciler konuyu daha çok örnekler üzerinden incelemelidir.*

✍  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  ve  $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$  matrislerini çarpalım. Matrisler kare ve türdeş oldukları için hem  $A \cdot B$  hem de  $B \cdot A$  çarpımları yapılabilir. Önce  $A \cdot B$  çarpımını yapalım, ardından işlemleri açıklayalım:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 & 2 \cdot 7 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & 10 \\ 38 & 19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

İlk önce bulduğumuz sonucun yukarıdaki tanımla aynı olduğunu görelim. A ve B matrisleri  $2 \times 2$  türünde matrisler oldukları için, sonuç matrisinin elemanları verilen tanıma göre

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \\ &= 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 4 + 18 = 22 \end{aligned}$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{k2} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 7 + 3 = 10$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \cdot b_{k1} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 8 + 30 = 38$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \cdot b_{k2} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 2 \cdot 7 + 5 \cdot 1 = 14 + 5 = 19$$

olmalıdır ve bu değerler bulduğumuz değerlerle aynıdır.

Şimdi işlemi pratik olarak nasıl gerçekleştirdiğimize bakalım. Aşağıdaki açıklamaları okurken daha önce yapılan çarpma işlemini takip edin.

- Sonuç matrisinin ilk satırının ilk elemanını elde etmek için çarpan matrisin ilk satırı ile çarpılan matrisin ilk sütununu çarpılır.
- Bu çarpma işleminde; satırın ilk elemanı sütunun ilk elemanı ile, satırın ikinci elemanı sütunun ikinci elemanı ile, satırın üçüncü elemanı sütunun üçüncü elemanı ile . . . çarpılır ve elde edilen tüm sonuçlar toplanır. Elde edilen toplam, sonuç matrisinin ilk satırının ilk elemanıdır.
- Sonuç matrisinin ilk satırının ikinci elemanını bulmak için çarpan matrisin ilk satırı ile çarpılan matrisin ikinci sütununu çarpılır. Bu işlem de yukarıda açıklanan şekilde yapılır.
- Çarpan matrisin ilk satırını çarpılan matrisin tüm sütunları ile çarptığımızda sonuç matrisin ilk satırı elde edilmiş olur. Sonuç matrisinin ikinci satırı için, yukarıda anlatılan işlemler çarpan matrisin ikinci satırı kullanılarak gerçekleştirilir. Buna göre, sonuç matrisin satır sayısı çarpan matris tarafından, sütun sayısı ise çarpılan matris tarafından belirlenir.

Aşağıda  $B \cdot A$  çarpımı verilmiştir. İşlemi yukarıda anlatılanlar ışığında inceleyin.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 \\ 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 6 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 47 \\ 8 & 23 \end{pmatrix}$$



### MATRİSLERDE ÇARPMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

A, B ve C birbiri ile çarpılabilir matrisler olmak üzere, matrislerde çarpma işleminin:

1. Birleşme özelliği vardır:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. Değişme özelliği yoktur:  $A \cdot B \neq B \cdot A$
3. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği vardır:  $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

- Birim matris ile çarpma işleminin

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

şeklinde tanımlanabilmesi için A matrisinin kare matris ve birim matris ile türdeş olması gerekir.

- Bir matrisin kuvveti kendi ile çarpımı şeklinde tanımlanır:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A$$

- Birim matrisin tüm kuvvetleri kendine eşittir.

*✍ A =  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  matrisinin 2000. kuvvetini hesaplayalım. Bu tür bir soruda amacımız, sayılar teorisindeki benzer sorularda olduğu gibi, birim matrise ulaşmaktır. Bunun için önce  $A^2$  matrisini bulalım:*

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Buna göre,

$$A^{2000} = (A^2)^{1000} = I^{1000} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olacaktır.

A ve B türdeş kare matrisler olmak üzere,

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

eşitliği sağlanıyorsa B matrisine, A matrisinin çarpmaya göre tersi adı verilir ve  $A^{-1}$  şeklinde gösterilir.

- Bir matrisin çarpmaya göre tersinin olması şart değildir ve eğer yoksa bu matris **TEKİL (SİNGÜLER) MATRİS** olarak adlandırılır. Aksi halde tekil olmayan matris denir.

- $2 \times 2$  türünde bir  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  matrisin çarpmaya göre tersinin olması için  $ad - bc \neq 0$  olması gerekir ve ters matris

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. Bu matris  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$  denkleminin çözülmesi ile elde edilmiştir. Eğer  $ad - bc = 0$  ise A matrisi tekildir.

*✍  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  denklemini sağlayan A matrisini bulalım. Önce  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  diyelim ve  $B^{-1}$  matrisini oluşturalım:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2 - 12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,4 \\ 0,3 & -0,1 \end{pmatrix}$$

Şimdi verilen denklemin her iki tarafı da soldan  $B^{-1}$  matrisi ile çarpılırsa A matrisi elde edilir:

$$\begin{pmatrix} -0,2 & 0,4 \\ 0,3 & -0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,4 \\ 0,3 & -0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -0,2 \cdot 2 + 0,4 \cdot 1 & -0,2 \cdot (-1) + 0,4 \cdot 3 \\ 0,3 \cdot 2 - 0,1 \cdot 1 & 0,3 \cdot (-0,1) - 0,1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1,4 \\ 0,5 & -0,6 \end{pmatrix}$$



Verilen bir matrisin satırlarını sütun, sütunlarını satır olarak yazmak suretiyle elde edilen matrise verilen matrisin devriği veya transpozu adı verilir.  $A$  matrisinin devriği  $A^d$  veya  $A^t$  şeklinde gösterilir.

✍  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  matrisi verildiğine göre,  $A \cdot A^t$  matrisini bulalım:

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### DEVRIK MATRİSİN ÖZELLİKLERİ

$k$  bir gerçekte sayı,  $A$  ve  $B$  aşğıdaki işlemleri mümkün kılan iki matris olmak üzere,

1. Bir matrisin devriğinin devriği kendisidir:  $(A^t)^t = A$
2. İki matrisin toplamalarının devriği, devriklerinin toplamına eşittir:  $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. Bir matrisin bir gerçekte sayı ile çarpımının devriği, matrisin devriğinin aynı gerçekte sayı ile çarpımına eşittir:  $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
4. İki matrisin çarpımının devriği, devriklerin değişmiş çarpımına eşittir:  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
5. Bir matrisin devriğinin çarpmaya göre tersi, çarpmaya göre tersinin devriğine eşittir:  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

➤ **DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ:** Bilinmeyenlerin en fazla birinci kuvvetlerini barındıran denklemlere **DOĞRUSAL DENKLEM** denir. Çözüm kümesi aynı olan denklemlere **DENKLEM SİSTEMİ**, doğrusal

denklemlerden oluşan sistemlere **DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMİ** adı verilir.

$x_j$  bilinmeyen,  $a_{ij}$  ve  $b_i$  birer gerçekte sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

bir denklem sistemi olsun. Bu sistemde;

1. Herhangi iki denklemin yerini değiştirmek,
  2. Herhangi bir denklemi (iki tarafını da) sıfırdan farklı bir gerçekte sayı ile çarpmak,
  3. Bir denklemin bir gerçekte sayı ile çarpımını başka bir denkleme eklemek sistemin çözüm kümesini değiştirmez.
- Sayılan bu yöntemler, **BASİT SATIR İŞLEMLERİ** olarak adlandırılırlar. Basit satır işlemlerinin kullanılması ile verilen bir denklem sisteminde bazı denklemlerin yapısı değiştirilerek çözüm kümesi bulunabilir. Bu çözüm yöntemine **BASAMAK BİÇİMİNE DÖNÜŞTÜRME** adı verilir.

Örneğin, aşğıda verilen denklem sistemini basamak biçimine dönüştürerek çözelim.

$$2x - 4y + 4z = 0$$

$$4x + 3y + 7z = -1$$

$$-x + 3y + 5z = 7$$

- İlk denklemi  $(-2)$  ile çarpalım ve ikinci denkleme ekleyelim.
- İlk denklemi  $-\frac{1}{2}$  ile çarpalım ve üçüncü denkleme ekleyelim.

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 4z &= 0 \\ 11y - z &= -1 \\ y + 7z &= 7 \end{aligned}$$

- Üçüncü denklemi  $(-11)$  ile çarpalım ve ikinci denkleme ekleyelim.
- İkinci ve üçüncü denklemin yerlerini değiştirelim.

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 4z &= 0 \\ y + 7z &= 7 \\ -78z &= -78 \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi verilen denklem sistemi basamak biçimini almıştır. Elde edilen basamak sisteme göre,

$$z = 1 \Rightarrow y = 0 \quad x = -2$$

değerleri bulunur.

➤ **MATRİSLERLE ÇÖZÜM:** Yukarıda verilen denklem sistemindeki bilinmeyenlerin katsayılarından, sıra gözetilerek oluşturulan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrise **KATSAYILAR MATRİSİ** adı verilir. Bilinmeyenlerden oluşan  $n \times 1$  türündeki matrise **BİLİNMEYENLER MATRİSİ** denir. Bilinmeyenler matrisi ve denklem sisteminin sağ tarafındaki değerlerden oluşan sabitler matrisi aşağıda görülmektedir.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Bu matrisler tanımlandıktan sonra, yukarıda verilen denklem sistemi

$$A \cdot X = B$$

şeklinde yazılabilir ve bu gösterime denklem sisteminin matrislerle gösterimi adı verilir.

Denklem sistemleri, matrislerden yararlanılarak çözülebilir. Bu çözümde katsayılar matrisi ile sabitler matrisinin birleştirilerek yazılmasından oluşan **GENİŞLETİLMİŞ MATRİSİ**nden faydalanılır. Genişletilmiş matris  $(A|B)$  şeklinde gösterilir ve sabitler matrisinin, katsayılar matrisine bir sütun olarak eklenmesi ile elde edilir. Yukarıdaki denklem sistemi için yazılan genişletilmiş matris aşağıda verilmiştir.

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Bir matriste;

1. Herhangi iki satırın yerini değiştirmek,
  2. Herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir gerçek sayı ile çarpmak,
  3. Bir satırı bir gerçek sayı ile çarpımını başka bir satıra eklemek
- TEMEL SATIR İŞLEMLERİ** olarak adlandırılırlar.

Denklem sistemlerinin matrislerle çözülmesinde genişletilmiş matrisin katsayılar bölümü, temel satır işlemleri ile, aşağıdaki gibi bir üçgen matris haline getirilmeye çalışılır. Eğer bu başarılırsa denklem çözülür. Bu yöntem **GAUSS YOK ETME** yöntemi adı verilir.

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b'_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} & b'_m \end{array} \right)$$

Denklem sistemlerinin matrislerle çözülmesinde kullanılan diğer bir yöntem de **GAUSS-JORDAN YOK ETME** yöntemidir. Bu yöntemde genişletilmiş matrisin katsayılar bölümü, temel satır işlemleri ile birim matris haline getirilmeye çalışılır.

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b'_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_m \end{array} \right)$$

Temel satır işlemlerinde eşitlik  $\rightarrow$ , yer değiştirme  $\leftrightarrow$  şeklinde gösterilir.

✍ Aşağıda verilen denklem sistemini Gauss yok etme yöntemi ile çözelim. Sistemin genişletilmiş matrisi de aşağıda görülmektedir.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y + z & = & 1 \\ 3x + 2y + 2z & = & 1 \\ x - y + 4z & = & 12 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 12 \end{array} \right)$$

Şimdi sistemi Gauss yok etme yöntemi ile çözelim. Matrisler arasında kullanılan  $(-2S_3 + S_1 \rightarrow S_1)$  gibi ifadeler temel satır işlemlerini gösterir. Örneğin,  $(-2S_3 + S_1 \rightarrow S_1)$  ifadesi üçüncü satırın  $(-2)$  ile çarpılıp birinci satırla toplanıp sonucun birinci satıra yazıldığını;  $(S_1 \leftrightarrow S_3)$  ifadesi birinci ve ikinci satırların yer değiştirdiğini gösterir.

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2S_3 + S_1 \rightarrow S_1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -7 & -23 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 12 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{(-3S_3 + S_2 \rightarrow S_2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -7 & -23 \\ 0 & 5 & -10 & -35 \\ 1 & -1 & 4 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{(-S_2 + S_1 \rightarrow S_1)} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 5 & -10 & -35 \\ 1 & -1 & 4 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{(S_1 \leftrightarrow S_3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 12 \\ 0 & 5 & -10 & -35 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array} \right) \end{array}$$

Görüldüğü gibi istenen matris elde edilmiştir. Bu genişletilmiş matrise karşılık gelen denklem sistemi ve çözümü

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 12 \\ 5y - 10z = -35 \\ 3z = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 4 \quad y = 1 \quad x = -3$$

şeklinde dir.

✍ Aşağıda verilen denklem sistemini Gauss-Jordan yok etme yöntemi ile çözelim. Sistemin genişletilmiş matrisi de aşağıda görülmektedir. Gauss-Jordan yönteminde, Gauss yönteminden farklı olarak, katsayılar bölümünde birim matrise ulaşmaya çalışacağız.

$$\begin{array}{rcl} 3x - y + z & = & 21 \\ x - y - z & = & -1 \\ 2x - y - 2z & = & 0 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 21 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 21 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2S_2 + S_3 \rightarrow S_3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 21 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{(S_3 + S_1 \rightarrow S_1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 23 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(-S_3 + S_2 \rightarrow S_2)} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 23 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(S_1 + S_2 \rightarrow S_2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 23 \\ 4 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{(-\frac{3}{4}S_2 + S_1 \rightarrow S_1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(\frac{1}{4}S_2 \rightarrow S_2, S_1 \leftrightarrow S_3)} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(S_1 \leftrightarrow S_2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \end{array}$$

Elde edilen bu matrise bakarak  $x = 6$ ,  $y = 2$  ve  $z = 5$  yazılabilir. Görüldüğü gibi Gauss-Jordan yöntemi, Gauss yönteminden daha yorucudur.

Temel satır işlemleri kullanılarak bir matrisin tersini bulmak mümkündür. Bunun için önce  $(A|I)$  genişletilmiş matrisi yazılır. Ardından bu matris çeşitli satır işlemleri ile  $(I|B)$  şeklinde bir matris haline getirilir. Bu durumda  $B = A^{-1}$  olacaktır.

✍ Her matrisin tersinin olmadığı düşünülmeli ve ters matris kavramının sadece kare matrisler için tanımlı olduğu unutulmamalıdır.



ÖRNEK 1  
KONU ÖZETLERİ



*✍*  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$  matrisinin tersini temel satır işlemleri yardımıyla bulalım. Bu matrisin genişletilmiş matrisi

$$(A|I) = \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

şeklinde. Bu matris çeşitli satır işlemleri ile  $(I|B)$  biçiminde bir matrise döndürülebilir:

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (-2S_1 + S_2 \rightarrow S_2) \rightarrow \\ &\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad (-3S_2 + S_1 \rightarrow S_1) \rightarrow \\ &\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad \left( \frac{1}{2}S_1 \rightarrow S_1 \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Buna göre,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  şeklindedir.

*✍* Matrislerde temel satır işlemlerine benzer olarak temel sütun işlemleri de tanımlanmıştır. Temel sütun işlemleri, temel satır işlemlerinin sütunlar arasında uygulanması ile gerçekleşir.

➤ **DETERMINANTLAR:** Determinant, bir kare matrisi bir gerçek sayıya eşleyen fonksiyondur. Bir  $A$  matrisinin determinanı  $\det A$  veya  $|A|$  şeklinde gösterilir.

- $1 \times 1$  türündeki bir  $A$  matrisinin determinanı matris elemanına eşittir.
- $2 \times 2$  türündeki bir matrisin determinanı  $(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$  değerine eşittir.
- $3 \times 3$  ve daha geniş türden matrislerin determinantları minör ve kofaktörler yardımıyla hesaplanır.

$3 \times 3$  veya daha geniş türde bir matrisin  $i$ . satırı ve  $j$ . sütununun

silinmesi ile elde edilen  $M_{ij}$  matrisinin determinantına, ilk matrisin  $a_{ij}$  elemanının **MINÖRÜ** denir.  $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$  değerine ise  $a_{ij}$  elemanının **KOFAKTÖRÜ** adı verilir ve  $A_{ij}$  şeklinde gösterilir.

$A_{n \times n}$  matrisinin determinanı,  $i$ . satıra veya  $j$ . sütuna göre hesaplanabilir ve neye göre hesaplanırsa hesaplanırsın sonuç aynı çıkar.  $|A|$  değeri  $i$ . satıra göre

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

bağıntısıyla,  $j$ . sütuna göre

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

bağıntısıyla hesaplanır.

*✍*  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  matrisinin determinantını üçüncü satıra ve ikinci

sütuna göre ayrı ayrı hesaplayalım. Hesaplama için verilen bağıntılarda  $a_{ij}$  elemanı bir çarpan olarak bulunduğu için, içinde sıfır bulunan satır ve sütunları seçmek, daha az kofaktör değeri hesaplamak açısından bize kolaylık sağlar.

Determinantın değerini önce üçüncü satıra göre hesaplayalım. Bunun için kullanacağımız bağıntı

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}(-1)^{3+1}|M_{31}| + a_{32}(-1)^{3+2}|M_{32}| + a_{33}(-1)^{3+3}|M_{33}| \\ &= 0 \cdot |M_{31}| - 2|M_{32}| + 5|M_{33}| = 5|M_{33}| - 2|M_{32}| \end{aligned}$$

şeklinde. Görüldüğü gibi,  $a_{31} = 0$  olduğu için  $|M_{31}|$  değerini hesaplamamıza gerek kalmamıştır. Şimdi,  $|M_{33}|$  ve  $|M_{32}|$  değerlerini bulalım.

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad M_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 7 = 6 - 28 = -22$$

$$\det M = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 7 = 0 - 7 = -7$$

Elde ettiğimiz bu değerlere göre, aradığımız determinant değeri,

$$\det A = -5 \cdot 7 + 2 \cdot 22 = 7$$

olarak bulunur.

Determinantın değerini şimdi de ikinci sütuna göre bulalım. Bunun için kullanacağımız bağıntı

$$\det A = a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}| + a_{22}(-1)^{2+2}|M_{22}| + a_{32}(-1)^{3+2}|M_{32}|$$

$$= -1 \cdot |M_{12}| + 0 \cdot |M_{22}| - 2 \cdot |M_{32}| = -|M_{12}| - 2|M_{32}|$$

olacaktır. Aranan determinant değerleri

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 7 \cdot 5 - 3 \cdot 0 = 35 - 0 = 35$$

$$\det M = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 7 = 6 - 28 = -22$$

olduğuna göre, A matrisinin determinantı

$$\det A = -35 + 2 \cdot 22 = 7$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi A matrisinin determinant değeri hesaplama yönteminden bağımsızdır.

#### DETERMINANTLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

1. Bir determinantta iki satırın veya sütunun yeri değiştirilirse determinantın değeri işaret değişir.
2. Bir determinantın bir satırı k gerçel sayısı ile çarpılırsa determinantın değeri de k gerçel sayısı ile çarpılmış olur.
3. Bir determinantın bir satırı (veya sütunu) bir gerçel sayı ile

çarpılıp başka bir satıra (veya sütuna) eklenirse, determinant değişmez.

4. Bir determinantın iki satırı ya da sütunu birbirine orantılı ise determinantın değeri sıfırdır.

➤ **SARRUS YÖNTEMİ:** Sarrus yöntemi  $3 \times 3$  türündeki determinantların hesaplanmasını kolaylaştıran bir hesap yöntemidir. Sarrus yöntemine göre,  $3 \times 3$  türündeki bir determinant

$$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23})$$

$$-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$

bağıntısı ile hesaplanır. İfade minör-kofaktör bağıntılarının  $3 \times 3$  türündeki matrisler için açılmış şeklidir.

☐ Sarrus bağıntısını ezberlerken indislerin matris üzerindeki çapraz ilerleyişine dikkat etmek gerekir. Bunun için, determinantın ilk iki satırı determinantın altına eklenir; asal köşegen ve paralel doğrular üzerindeki elemanların çarpımı "+", çapraz doğrular üzerindeki elemanların çarpımı "-" işareti ile toplanır.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Benzer sonuç ilk iki sütunun determinantın sağına eklenmesi ile de elde edilebilir.

Örneğin,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  matrisinin determinantını Sarrus yöntemi

ile bulalım. Yöntemin iyice anlaşılabilmesi için önce verilen matrise ilk iki satırı ekleyerek yazalım:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Ek satırlar eklenmemiş, asıl matrisin her satır başı elemanından başlayan ve asal köşegene paralel çizgi üzerinde yer alan üçer elemanı birbiri ile çarpıp sonuçları toplayalım:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -4 \\ 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63 \\ 6 \cdot 1 \cdot 4 = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 + 63 + 24 = 83$$

Şimdi, yukarıda kullandığımız üç doğrunun çaprazındaki üç doğru üzerindeki elemanları birbiri ile çarpıp sonuçları toplayalım:

$$\left. \begin{array}{l} 7 \cdot (-1) \cdot 6 = -42 \\ 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \\ 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow -42 + 24 + 6 = -12$$

Determinantın değeri elde ettiğimiz ilk sonuçtan ikincinin farkıdır:

$$\det A = 83 - (-12) = 95$$

Bir A matrisinin elemanları yerine, bu elemanların kofaktörlerinin yazılması ile oluşturulan matrisin devriğine **EK MATRİS** adı verilir ve  $\text{Ek}(A)$  şeklinde gösterilir. Ek matristen bir matrisin tersini bulmak için faydalanırız.

•  $\det A \neq 0$  olmak üzere,  $A^{-1} = \frac{\text{Ek}(A)}{\det A}$  olur.

✍  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  matrisinin tersini bulalım.  $A^{-1} = \frac{\text{Ek}(A)}{\det A}$

bağıntısından yararlanmak için önce  $\text{Ek}(A)$  matrisini oluşturalım. Bunun için her bir elemanın kofaktörünü bulmamız gerekir.

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| = 2 & A_{12} &= (-1)^{1+2} |M_{12}| = -5 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} |M_{21}| = -3 & A_{22} &= (-1)^{2+2} |M_{22}| = 2 \end{aligned}$$

Buna göre

$$\text{Ek}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

olacaktır.  $\det A = 4 - 15 = -11$  olduğuna göre A matrisinin tersi

$$A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde dir.

A katsayılar matrisi, B sabitler matrisi olmak üzere, bir doğrusal denklem sistemi  $AX = B$  şeklinde yazılabilir. Bu denklem sisteminin çözüm kümesi, yazılan eşitliğin her iki tarafını da  $A^{-1}$  ters matrisiyle çarpmak suretiyle bulunabilir:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

✍ Aşağıdaki denklem sisteminin çözüm kümesini ters matris yöntemi ile bulalım. Sistemin katsayılar matrisi de aşağıda görülmektedir.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -4 \\ x + y - 3z &= -11 \\ 3x - y + 2z &= 19 \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Önce katsayılar matrisinin ek matrisini bulalım:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1) = -1 \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} |M_{12}| = -(1 \cdot 2 - (-3) \cdot 3) = -11 \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} |M_{13}| = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1} |M_{21}| = -(3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) = -5 \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} |M_{22}| = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 7 \\ A_{23} &= (-1)^{2+3} |M_{23}| = -(2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3) = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{31} &= (-1)^{3+1} |M_{31}| = 3 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 = -8 \\ A_{32} &= (-1)^{3+2} |M_{32}| = -(2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1) = 5 \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} |M_{33}| = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1 \end{aligned}$$



Elde edilen bu değerlere göre  $Ek(A)$  matrisi

$$Ek(A) = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -8 \\ -11 & 7 & 5 \\ -4 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.  $A^{-1}$  matrisini bulmak için gereken  $\det A$  değerini Sarrus yöntemi ile hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \det A &= (2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot (-3)) \\ &\quad - ((-1) \cdot 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1) \\ &= (4 + 1 - 27) - (-3 + 6 + 6) = -31 \end{aligned}$$

Buna göre ters matris

$$A^{-1} = -\frac{1}{31} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -8 \\ -11 & 7 & 5 \\ -4 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin sabitler matrisi ile çarpımı bize sistemin çözüm kümesini verecektir:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot B &= -\frac{1}{31} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -8 \\ -11 & 7 & 5 \\ -4 & 11 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{31} \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-4) + (-5) \cdot (-11) + (-8) \cdot 19 \\ (-11) \cdot (-4) + 7 \cdot (-11) + 5 \cdot 19 \\ (-4) \cdot (-4) + 11 \cdot (-11) + (-1) \cdot 19 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{31} \begin{pmatrix} -93 \\ 62 \\ -124 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x = 3 \quad y = -2 \quad z = 4$$

➤ **CRAMER YÖNTEMİ:** Bir denklem sistemini temsil eden katsayılar matrisinde  $j$ . sütun yerine sabitler matrisi yazılır ve bu matrisin determinanı, katsayılar matrisinin determinantına bölünürse  $x_j$  bilinmeyeninin değeri elde edilir.

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & b_{1j} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & b_{2j} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & b_{nj} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

Bir denklem sisteminde bilinmeyenlerin bu şekilde bulunmasına **CRAMER YÖNTEMİ** adı verilir.

Cramer yönteminde kullanılan  $\det A \neq 0$  ise sistemin tek çözümü vardır. Tüm determinantların değeri sıfır ise çözüm sonsuzdur.

✍ Aşağıdaki sistemin tek bir çözümünün olması için  $a$  sayısının değerinin kaç olması gerektiğini bulalım.

$$x + 3y = 4 \quad ax - y = 4$$

Katsayılar matrisi  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & -1 \end{pmatrix}$  olduğuna göre, çözümün tek olması için  $-1 - 3a \neq 0$  olmalıdır. Buna göre,  $a \neq -\frac{1}{3}$  olduğu sürece çözüm tektir.

$a = 5$  için çözümü bulalım. Bu durumda  $\det A = -16$  olur. Bilinmeyenler ise

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{-4 - 12}{-16} = 1 \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{-16} = \frac{4 - 20}{-16} = 1 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.