

İNTEGRAL UYGULAMALAR

LİSE MATEMATİK - KONU: 18

• BİLİYOR MUSUN?

- ✓ Belirli integral!
- ✓ Alan ve hacim hesapları!

➤ **BELİRLİ İNTEGRAL:** İntegral işlemi bir toplamın limiti olarak da tanımlanabilir. İntegral işlemi bir limit olarak tanımlandığında belirli integral adını alır ve \int_a^b şeklinde gösterilir. a ve b değerleri, sırasıyla integralin alt ve üst sınırlarıdır. Bu tanıma göre, $f(x)$ fonksiyonu $F(x)$ fonksiyonunun türevi olmak üzere,

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

olur.

✍ Belirli integralde, C belirsiz sabiti bulunmaz.

✍ $\int_3^9 (x^2 + 1) dx$ integralini hesaplayalım.

$$\int_3^9 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_3^9 = (243 + 9) - (9 + 3) = 240$$

BELİRLİ İNTEGRALIN ÖZELLİKLERİ

$k, a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a < c < b$ olmak üzere,

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$4. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$5. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

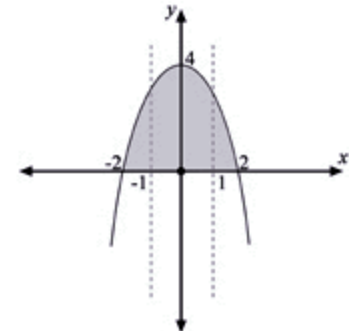
➤ **ALAN HESABI:** Analitik düzlemde $y = f(x)$ fonksiyonu ile verilmiş bir eğrinin, $y = 0$, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırladığı alan, $a < b$ olmak üzere,

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

belirli integraline eşittir.

✍ $y = -x^2 + 4$ parabolünün x eksenini ile sınırladığı alanı bulalım.

İstenen alan, yandaki şekilde görülen taralı bölgedir. Parabol x eksenini $x = -2$ ve $x = 2$ noktalarında kestiğini göre, sınırlanan alanın değeri



$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx &= -\frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{-2}^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(-\frac{8}{3} - 8\right) \\ &= \frac{32}{3} \text{ br}^2\end{aligned}$$

olacaktır.

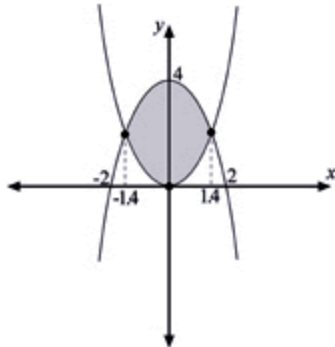
Şimdi de aynı parabolün y eksenini ve $x = \pm 1$ doğruları ile sınırladığı alanı bulalım.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (-x^2 + 4) dx &= -\frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - 4\right) \\ &= \frac{22}{3} \text{ br}^2\end{aligned}$$

Analitik düzlemde $f(x)$ ve $g(x)$ gibi iki eğri arasında kalan ve $x = a$, $x = b$ doğruları ile sınırlanan alan

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

belirli integrali ile bulunur.



f(x) = -x^2 + 4 ve g(x) = x^2 parabolleri arasında kalan alanı bulalım.

İstenen alan şekildedeki taralı bölgedir. İki eğrinin kesişme noktaları

$$\begin{aligned}x^2 &= -x^2 + 4 \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \approx -1.4 \\ x_2 = \sqrt{2} \approx 1.4 \end{cases}\end{aligned}$$

olduğuna göre, belirli integralin sınırları bu değerler olacaktır:

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-x^2 + 4 - x^2) dx &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-2x^2 + 4) dx \\ &= -\frac{2x^3}{3} + 4x \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2}\right) - \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{16}{3} \sqrt{2} \text{ br}^2\end{aligned}$$

➤ **HACİM HESABI:** Analitik düzlemde $y = f(x)$ fonksiyonu ile verilmiş bir eğrinin, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlanan parçasının x eksenini etrafında 360 derece döndürülmesi ile oluşacak cismin hacmi, $a < b$ olmak üzere,

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

belirli integraline eşittir.

Bir kürenin hacmini bulalım.

Merkezi orijinde bulunan, yarıçapı r olan bir çemberin x eksenini üzerinde kalan bölümü, x eksenini etrafında 360 derece döndürülürse bir küre elde edilir. Böyle bir çemberin denklemi $y^2 = r^2 - x^2$ olduğunu göre, kürenin hacmi

$$\begin{aligned}\pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx &= \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-r}^r \\ &= \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ br}^3\end{aligned}$$

olacaktır.