

TRİGONOMETRİ

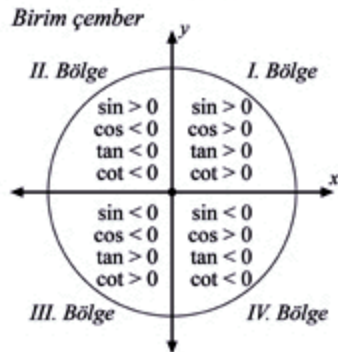
LİSE MATEMATİK - KONU: 8

• BİLİYOR MUSUN?

- ✓ Yönlü açı, birim çember, açı birimleri ve esas ölçü!
- ✓ Trigonometrik fonksiyonlar, ve grafikleri!
- ✓ Ters trigonometrik fonksiyonlar ve üçgen teoremleri!
- ✓ Toplam, fark formülleri ve trigonometrik denklemler!

➤ **TEMEL KAVRAMLAR:** Matematikte ve fizikte, saat yelkovanının dönme yönünün tersi yön, pozitif yön olarak kabul edilir. Açılar bu yönde ölçüldüklerinde pozitif, aksi yönde ölçüldüklerinde negatif olarak kabul edilirler.

Merkezi orijinde, yarıçapı 1 birim olan çembere **BİRİM ÇEMBER** adı



verilir. Birim çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 1$ şeklindedir.

Yan taraftaki şekilde birim çember, bölgeler ve trigonometrik fonksiyonların işaretleri görülmektedir.

Açılar ve çember yayları **DERECE** ve **RADYAN** birimi ile ölçülür. Bu iki birim

$$\frac{\text{derece}}{360} = \frac{\text{radyan}}{2\pi}$$

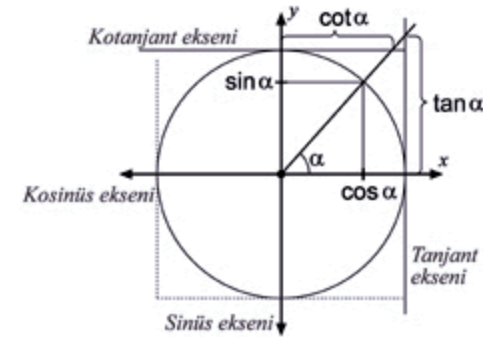
bağıntısı ile birbirini bağılıdır.

Değeri 360 derece veya 2π radyandan daha büyük olan her θ açısı, k bir tam sayı olmak üzere,

$$\theta = k \cdot 360 + \alpha \quad \text{veya} \quad \theta = k \cdot 2\pi + \alpha$$

şeklinde yazılabilir. α açısına, θ açısının **ESAS ÖLÇÜSÜ** adı verilir.

➤ **TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR:** Bir α açısının trigonometrik fonksiyonlarının birim çember üzerinde tanımlanışı aşağıdaki şekilde görülmektedir.



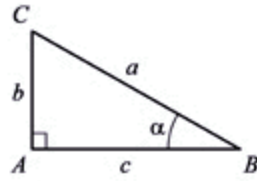
Birim çemberde:

- Düşey eksen sinüs fonksiyonunu,
- Yatay eksen kosinüs fonksiyonunu,
- Düşey teğet eksenler tanjant fonksiyonunu,
- Yatay teğet eksenler kotanjant fonksiyonunu, temsil eder.

Birim çember üzerinde verilen tanımdan

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \alpha \leq 1 & -1 &\leq \cos \alpha \leq 1 \\ -\infty &< \tan \alpha < \infty & -\infty &< \cot \alpha < \infty \end{aligned}$$

olduğu görülmektedir.



Bir α açısının trigonometrik fonksiyonları bir dik üçgen üzerinde soldaki şekilde görüldüğü gibi tanımlanır.

- AB kenarının uzunluğu c
- BC kenarının uzunluğu a
- CA kenarının uzunluğu b olmak üzere:

$$\sin \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{b}{a} \quad \cos \alpha = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{hipotenüs}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}} = \frac{b}{c} \quad \cot \alpha = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{karşı dik kenar}} = \frac{c}{b}$$

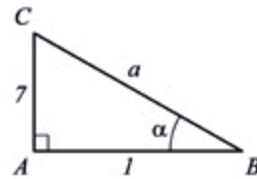
Trigonometride bir açının sekant ve kosekant fonksiyonları

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

şeklinde tanımlanır.

✍ Bir açiya ait herhangi bir trigonometrik fonksiyonun değeri verilip diğer bir fonksiyonun değeri istendiğinde, fonksiyonların dik üçgen tanımlarından, Pisagor teoreminden ve faydalanılır.

✍ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ olmak üzere $\tan \alpha = 7$ olarak verilip $\sin \alpha$ değerinin bulunması istendiğinde önce ABC dik üçgeni çizilir. $\tan \alpha = 7$ olduğuna göre, karşı kenar $b = 7$, komşu kenar $c = 1$ olacaktır. Pisagor teoremine göre, a kenarının uzunluğu



$$a = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

olacaktır. Öyleyse $\sin \alpha$ değeri

$$\sin \alpha = \frac{b}{a} = \frac{7}{\sqrt{50}}$$

olur. Fakat $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ olduğundan dolayı, α açısı üçüncü bölgede yer almaktadır. Dolayısıyla $\sin \alpha < 0$ olur. Öyleyse $\sin \alpha = -\frac{7}{\sqrt{50}}$ olmalıdır.

➤ **PERİYODİK FONKSİYON:** $f: A \rightarrow R$ olmak üzere, her $x \in A$ için

$$f(x + T) = f(x)$$

eşitliğini sağlayan bir T sayısı varsa f fonksiyonuna **PERİYODİK FONKSİYON** adı verilir. T sayısı, $f(x + T) = f(x)$ eşitliğini sağlayan en küçük sayı ise T sayısına **ESAS PERİYOT** denir.

- $f(mx + n)$ fonksiyonunun esas periyodu $\frac{T}{|m|}$ olur.
- T sayısının $2T, 3T, 4T$ gibi her tam katı f fonksiyonunun bir periyodudur.

m bir tam sayı olmak üzere, $\sin^m(ax + b)$ ve $\cos^m(ax + b)$ fonksiyonlarının periyodu

$$T = \begin{cases} \frac{2\pi}{|a|} & m \text{ tek sayı ise} \\ \frac{\pi}{|a|} & m \text{ tek çift ise} \end{cases}$$

$\tan^m(ax + b)$ ve $\cot^m(ax + b)$ fonksiyonlarının periyodu ise

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

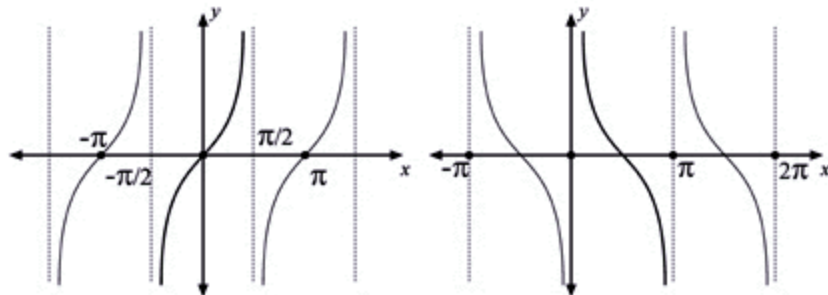
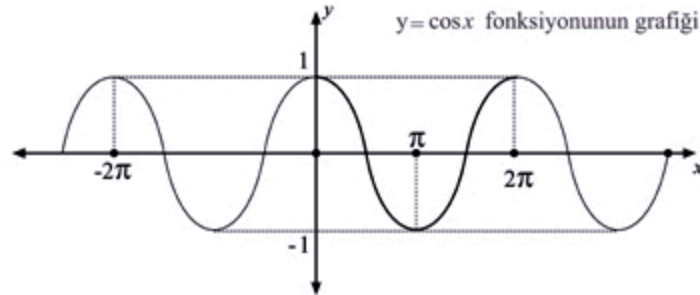
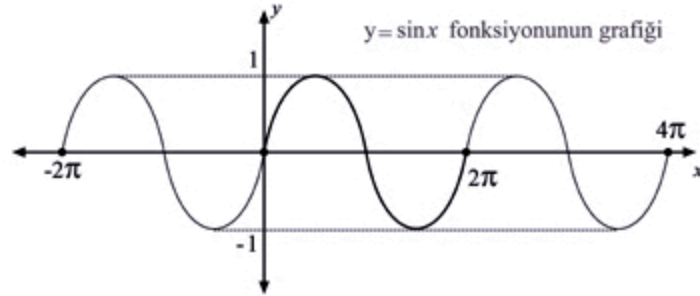
şeklinde dir.

➤ **TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ:** Trigonometrik fonksiyonlar gibi periyodik fonksiyonların grafiklerinin çiziminde şu adımlar izlenir:

1. Fonksiyonun esas periyodu uzunluğunda bir aralık seçilir.
2. Fonksiyonun seçilen aralıktaki değişimi incelenir.
3. Fonksiyonun seçilen aralıktaki grafiği çizilir ve bu uzunluktaki ardışık aralıklar için çizim tekrarlanır.

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının grafikleri $[0, 2\pi]$, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafikleri ise $[0, \pi]$ aralığında çizilerek sırasıyla 2π ve π uzunluğundaki ardışık aralıklar için tekrar edilir.

Aşağıdaki şekilde $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ve $\cot x$ fonksiyonlarının grafikleri görülmektedir.



$y = \tan x$ fonksiyonunun grafiği

$y = \cot x$ fonksiyonunun grafiği

GRAFİK ÇİZİMİNDE FAYDALI PRATİK KURALLAR:

1. $y = a \sin x$ veya $y = a \cos x$ fonksiyonlarının grafikleri, düşey ekseninde $[-1, 1]$ aralığında yer alan $y = \sin x$ veya $y = \cos x$ eğrilerinin, yine düşey ekseninde $[-a, a]$ aralığına *gerilmesi* veya *sıkıştırılması* ile elde edilir.

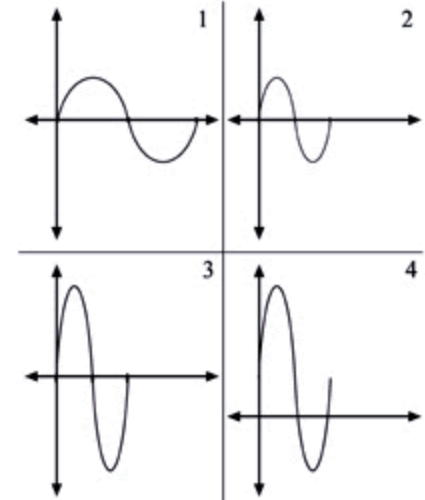
2. $y = a + \sin x$ veya $y = a + \cos x$ fonksiyonlarının grafikleri, $y = \sin x$ veya $y = \cos x$ eğrilerinin, düşey ekseninde a birim kaydırılması ile elde edilir.

3. $y = \sin ax$ veya $y = \cos ax$ fonksiyonlarının grafikleri, yatay ekseninde $[0, 2\pi]$ aralığında yer alan $y = \sin x$ veya $y = \cos x$ eğrilerinin, yine yatay ekseninde $[0, \frac{2\pi}{a}]$ aralığına *sıkıştırılması* veya *gerilmesi* ile elde edilir.

4. $y = \sin(x - a)$ veya $y = \cos(x - a)$ fonksiyonlarının grafikleri, yatay ekseninde $[0, 2\pi]$ aralığında yer alan $y = \sin x$ veya $y = \cos x$ eğrilerinin, yine yatay ekseninde a kadar kaydırılması ile elde edilir.

$y = 1 + 2 \sin 2x$ fonksiyonunun grafiği

- çizilirken:
- Önce $y = \sin x$ fonksiyonunun eğrisi alınır;
 - Pratik kural 3'e göre, eğri yatay ekseninde $[0, \pi]$ aralığına sıkıştırılır;
 - Pratik kural 1'e göre, eğri düşey ekseninde $[-2, 2]$ aralığına gerilir;
 - Pratik kural 2'ye göre, eğri düşey ekseninde 1 birim yukarı kaydırılır.
- Söylenenler yandaki şekilde gerçekleştirilmiştir. 4 numaralı şekilde, yer darlığı nedeniyle eğri yukarı değil, yatay eksen aşağı kaydırılmıştır.



➤ **TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR:** Trigonometrik fonksiyonlar bire bir örten oldukları aralıklara kısıtlanırlarsa ters fonksiyon kabul ederler (hatırlayın ki bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir örten olması gerekir). Buna göre:

1. Sinüs fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına kısıtlandığında bire bir örten olur ve

$$\sin u = v \Leftrightarrow u = \arcsin v$$

şeklinde tanımlanan, arksinüs fonksiyonunu ters fonksiyon olarak kabul eder. Arksinüs fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığından $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına tanımlıdır.

2. Kosinüs fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığına kısıtlandığında bire bir örten olur ve

$$\cos u = v \Leftrightarrow u = \arccos v$$

şeklinde tanımlanan, arkkosinüs fonksiyonunu ters fonksiyon olarak kabul eder. Arkkosinüs fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığından $[0, \pi]$ aralığına tanımlıdır.

3. Tanjant fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına kısıtlandığında bire bir örten olur ve

$$\tan u = v \Leftrightarrow u = \arctan v$$

şeklinde tanımlanan, arktanjanjant fonksiyonunu ters fonksiyon olarak kabul eder. Arktanjanjant fonksiyonu gerçel sayılar kümesinden $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına tanımlıdır.

4. Kotanjant fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığına kısıtlandığında bire bir örten olur ve

$$\cot u = v \Leftrightarrow u = \operatorname{arccot} v$$

şeklinde tanımlanan, arkkotanjant fonksiyonunu ters fonksiyon olarak kabul eder. Arkkotanjant fonksiyonu gerçel sayılar kümesinden $[0, \pi]$ aralığına tanımlıdır.

✍ $\tan(\arccos(-1/4))$ değerini hesaplayalım. Arkkosinüs fonksiyonunun tanımına göre,

$$\arccos(-1/4) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{4}$$

yazarız. Kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyon kabul ettiği bölge $[0, \pi]$ aralığı ve $\cos \alpha < 0$ olduğuna göre, $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ olmalıdır. Bu durumda $\sin \alpha > 0$ olacaktır. Öyleyse aranan tanjant değeri, özdeşlikler yardımıyla

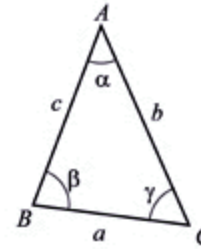
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\tan(\arccos(1/4)) = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{15}$$

şeklinde bulunur.

Aynı çözüme kosinüs değeri $1/4$ olan dik üçgeni çizmek yoluyla da ulaşabilirdik. Bu çözümün sonunda da açıların hangi bölgede olduklarına dikkat etmemiz ve sonucu ona göre işaretlememiz (pozitif/negatif) gerekir.

➤ **KOSİNÜS TEOREMİ:** Kosinüs teoremi, bir üçgende iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açı bilindiğinde üçüncü kenarın uzunluğunu hesaplamada kullanılan bir teoremdir. Kosinüs teoreminin yandaki üçgene göre ifadesi aşağıda verilmiştir.



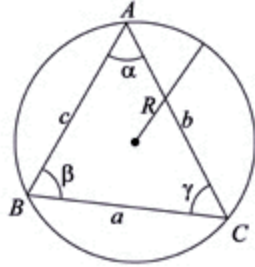
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Kosinüs teoremi uzaklıkların hesaplanması ile ilgili problemlerde sıklıkla kullanılır.

- **SİNÜS TEOREMİ:** Sinüs teoremi, bir üçgende kenar uzunluklarının karşıt açı sinüslerine oranının çevrel çember çapına eşit olduğunu ifade eden bir teoremdir. Sinüs teoreminin yandaki şekle göre ifadesi aşağıda verilmiştir.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Sinüs teoremi, uzunluk ve uzaklık problemlerinde, genellikle kosinüs

teoremi ile beraber, sıklıkla kullanılır.

✍ Kenar uzunlukları ve bir açısı $a = 30$ cm, $b = 15\sqrt{2}$ cm, $\alpha = 45^\circ$ olarak verilen üçgenin diğer kenarının ve açılarının değerini bulalım. Kosinüs teoremine göre,

$$30^2 = (15\sqrt{2})^2 + c^2 - 2 \cdot 15\sqrt{2} \cdot c \cdot \cos 45$$

$$900 = 450 + c^2 - 30c \Rightarrow c = 15(1 + \sqrt{3})$$

değeri elde edilir. Elde edilen ikinci derece denklem diskriminant yöntemi ile çözülmüş ve sıfırdan büyük olan değer çözüm olarak kabul edilmiştir. β açısını elde etmek için, sinüs teoremi kullanılırsa

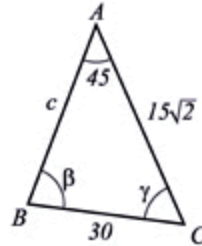
$$\frac{30}{\sin 45} = \frac{15\sqrt{2}}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{15\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 30} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

değeri elde edilir. Buna göre, $\gamma = 180 - 30 - 45 = 105^\circ$ olacaktır.

- **ÜÇGENDE ALAN BAĞINTILARI:** Kenar uzunlukları a, b, c ; kenar uzunlukları toplamı $u = a + b + c$; çevrel çemberinin yarıçapı R olan bir ABC üçgeninin alanı

$$A = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$

$$A = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} \quad A = \frac{abc}{4R}$$



bağıntıları yardımıyla hesaplanabilir.

- **TRİGONOMETRİK DENKLEMLER:** İçinde bilinmeyen trigonometrik fonksiyonların bulunduran denklemlere **TRİGONOMETRİK DENKLEM** adı verilir.

✓ Denklemin çözümü sırasında, trigonometrik fonksiyonların özelliklerinden faydalanılır. Bu nedenle bir trigonometrik denklemi çözebilmek için trigonometrik özdeşlikleri çok iyi bilmek gerekir.

Bir denklemin köklerinin sadece belli bir aralıkta bulunması isteniyorsa tüm kökler bulunur ancak sadece istenen aralıktaki kökler yazılır.

✓ İçinde yer alan değişkenin her değeri için doğru olan eşitliklere **ÖZDEŞLİK**, değişkenin bazı değerleri için doğru olan eşitliklere **DENKLEM** adı verilir. Bir denklemin bir tarafı sıfır ise bu denkleme **HOMOJEN DENKLEM** adı verilir.

1. $\sin x = a$ denkleminin çözümünün olabilmesi için, $-1 \leq a \leq 1$ olması gerekir. Sinüs fonksiyonunun $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ özelliği dolayısıyla, eğer α , $\sin x = a$ denkleminin bir çözümü ise $(\pi - \alpha)$ da bir çözümdür. Trigonometrik fonksiyonların periyodik olmaları nedeniyle $\sin x = a$ denkleminin çözüm kümesi

$$\mathcal{C} = \{x : x = \alpha + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde dir.

✍ $4 \sin 3x = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım. Verilen denklem $\sin 3x = \frac{1}{2}$ şeklinde yazılırsa $-1 \leq a \leq 1$ şartının sağlandığı görülür. Buna göre, x bilinmeyeni için

$$\sin 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{18}$$

değeri bulunur. Çözüm kümesi, derece cinsinden

$$\mathcal{C} = \{\alpha = 10 + 360k \text{ veya } \alpha = 170 + 360k, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

olur.

u ve v , x 'in birer fonksiyonu ve k bir tam sayı olmak üzere,
 $\sin u(x) = \sin v(x)$ denkleminin çözümü için,
 $u(x) = v(x) + k \cdot 2\pi$ veya $u(x) = \pi - v(x) + k \cdot 2\pi$ olması gerekir.

2. $\cos x = a$ denkleminin çözümünün olabilmesi için, $-1 \leq a \leq 1$ olması gerekir. Kosinüs fonksiyonunun $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ özelliği dolayısıyla, eğer α , $\cos x = a$ denkleminin bir çözümü ise $(-\alpha)$ da bir çözümdür. Trigonometrik fonksiyonların periyodik olmaları nedeniyle $\cos x = a$ denkleminin çözüm kümesi

$$C = \{x : x = \alpha + k \cdot 2\pi \vee x = -\alpha + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde dir.

u ve v , x 'in birer fonksiyonu ve k bir tam sayı olmak üzere,
 $\cos u(x) = \cos v(x)$ denkleminin çözümü için,
 $u(x) = v(x) + k \cdot 2\pi$ veya $u(x) = -v(x) + k \cdot 2\pi$ olması gerekir.

✍ $\cos(3x) = \cos(3\pi - 2x)$ denkleminin $(\pi, 2\pi)$ aralığındaki köklerini bulalım. Eşitliğin sağlanabilmesi için argümanların eşit olması, yani $3x = 3\pi - 2x + 2k\pi$ veya $3x = -3\pi + 2x + 2k\pi$ olması gerekir.

$$3x = 3\pi - 2x + 2k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{3}{5}\pi + \frac{2}{5}k\pi$$

$$3x = -3\pi + 2x + 2k\pi \Rightarrow x_2 = -3\pi + 2k\pi$$

$k = 2, 3$ için x_1 ifadesi $(\pi, 2\pi)$ aralığında çözüm oluşturur:

$$x = \begin{cases} \frac{7}{5}\pi & k = 2 \\ \frac{9}{5}\pi & k = 1 \end{cases}$$

x_2 ifadesi hiçbir k değeri için istenen aralıkta çözüm oluşturmaz. Buna göre, çözüm kümesi

$$C = \left\{ \frac{7}{5}\pi, \frac{9}{5}\pi \right\}$$

şeklinde dir.

3. $\tan x = a$ ve $\cot x = a$ denklemleri, a sayısının her gerçek değeri için çözümlüdürler. Tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının periyodu π olduğu için, denklemlerin çözüm kümesi

$$C = \{x : x = \alpha + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde dir.

u ve v , x 'in birer fonksiyonu ve k bir tam sayı olmak üzere,
 $\tan u(x) = \tan v(x)$ veya $\cot u(x) = \cot v(x)$ denklemlerinin çözümü için, $u(x) = v(x) + k \cdot \pi$ olması gerekir.

4. $a \cos x + b \sin x = c$ denkleminin çözümünün olması için, $c^2 \leq a^2 + b^2$ olması gerekir.

✍ $3 \cos x + 4 \sin x = 2$ denkleminin çözüm kümesini arayalım. Verilen denklemden $a = 3, b = 4, c = 2$ olarak $c^2 \leq a^2 + b^2$ şartı sağlanmaktadır. Verilen denklemin her terimi 3 ile bölünürse

$$\cos x + \frac{4}{3} \sin x = \frac{2}{3}$$

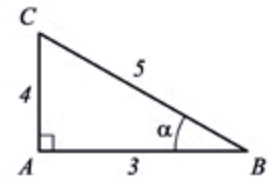
denklemi elde edilir. Denklemden $\frac{4}{3}$ yerine $\tan \alpha$ yazarsak denklem

$$\cos x + \tan \alpha \sin x = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x = \frac{2}{3} \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha - x) = \frac{2}{3} \cos \alpha$$

halini alır. Yandaki şekil yardımıyla, tanjant değeri $\frac{4}{3}$ olan α açısının kosinüs değerinin $\frac{3}{5}$ olduğu bulunabilir. Buna göre:

$$\cos(\alpha - x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = 0,4 \Rightarrow \alpha - x = \pm 66^\circ$$



Trigonometrik tablo veya hesap makinesi yardımıyla α açısının değeri $\arccos 0,6 = 53^\circ$ şeklinde bulunur. Buna göre x açısının değeri -13° veya 119° olacaktır.

ÖNEMLİ TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİK VE BAĞINTILAR

1. Aynı açının trigonometrik fonksiyonlarını birbirine bağlayan özdeşlikler.

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \cot \alpha \cdot \tan \alpha &= 1 \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \sec^2 \alpha &= 1 + \tan^2 \alpha & \csc^2 \alpha &= 1 + \cot^2 \alpha\end{aligned}$$

2. Trigonometrik fonksiyonların periyodik özelliklerine ait özdeşlikler.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \sin \alpha & \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \cos \alpha \\ \tan(\alpha + k \cdot \pi) &= \tan \alpha & \cot(\alpha + k \cdot \pi) &= \cot \alpha\end{aligned}$$

3. Toplamaya göre ters açılarının trigonometrik fonksiyonlarını birbirine bağlayan özdeşlikler.

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

4. Açılarının trigonometrik fonksiyonlarının birinci bölgeye indirgenmesine ait özdeşlikler.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha & \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha & \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha & \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha & \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2\pi - \alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(2\pi - \alpha) &= \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(2\pi - \alpha) &= \cot(-\alpha) = -\cot \alpha\end{aligned}$$

5. Yarım açı bağıntıları.

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} & \cot 2\alpha &= \frac{2 \cot \alpha}{1 - \cot^2 \alpha}\end{aligned}$$

6. İki açının toplam ve farkının trigonometrik fonksiyonlarına ait bağıntılar.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{1 - \cot \alpha \cot \beta}$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha - \cot \beta}{1 + \cot \alpha \cot \beta}$$

7. Dönüşüm bağıntıları.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

8. Ters dönüşüm bağıntıları.

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \left[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \right]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right]$$

$$\tan \alpha \tan \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}$$