

POLİNOMLAR ÇARPANLARA AYIRMA

LİSE MATEMATİK - KONU: 5

• BİLİYOR MUSUN?

- ✓ Polinom, sabit polinom ve sıfır polinomu!
- ✓ Polinomlar kümesinde işlemler!
- ✓ Kalan bulma, indirgenemeyen polinom ve asal polinom!
- ✓ Çarpanlara ayırma yöntemleri, polinomlarda OBEB ve OKEK!
- ✓ Rasyonel ifadeler, polinom ve rasyonel denklemler!

➤ POLİNOM: a_i gerçel sayılar, n bir doğal sayı olmak üzere,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

şeklindeki ifadelere **POLİNOM** adı verilir.

○ TEMEL TANIMLAR: $a_i x^i$ çarpımına polinomun terimi; n sayısı polinomun derecesi; a_0 polinomun sabit terimi; a_i sayıları polinomun katsayıları; a_n polinomun başkatsayısı olarak adlandırılır. Bir polinomda bulunan terim sayısına polinomun terim sayısı denir.

✍ $P(x) = \sqrt{2}x^2 + \pi x - 4$ ifadesi katsayıları gerçel sayılar, terimlerinin dereceleri doğal sayılar olduğu için bir polinomdur. Fakat, $N(x) = 2x^3 + \frac{4}{x^2} + 7$ ifadesi terimlerinden birinin derecesi doğal sayı olmadığı için bir polinom değildir.

✍ Her polinom, gerçel sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyondur.

Polinomun derecesi der şeklinde gösterilir.

✍ $P(x) = 3x^2 + 4x + 1$ polinomunun derecesi $\text{der}[P(x)] = 2$ şeklinde ifade edilir.

POLİNOMLARDA İKİ ÖZEL DEĞER

1. Bir $P(x)$ polinomunun sabit terimini bulmak için $x = 0$ yazılır ve $P(0)$ değerinden bahsedildiğinde polinomun sabit terimi anlaşılır.
2. Bir $P(x)$ polinomunun katsayılar toplamını bulmak için $x = 1$ yazılır ve $P(1)$ değerinden bahsedildiğinde polinomun katsayılar toplamı anlaşılır.

✍ $P(x) = ax^3 - x + b - 2$ polinomunda sabit terim 4, katsayılar toplamı 12 olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımının değerini bulalım.

Sabit terim 4 olduğuna göre,

$$P(0) = a \cdot 0 - 0 + b - 2 = 4 \Rightarrow b = 6$$

katsayılar toplamı 12 olduğuna göre,

$$P(1) = a \cdot 1 - 1 + 6 - 2 = 12 \Rightarrow a = 9$$

olur. Öyleyse $a \cdot b = 54$ olacaktır.

➤ POLİNOM EŞİTLİK: İki polinomun her x değeri için aynı sonucu vermeleri durumuna **POLİNOM EŞİTLİK** adı verilir. $P(x) = \dots a_i x^i \dots$ ve $R(x) = \dots b_i x^i \dots$ gibi iki polinomun eşit olabilmeleri için derecelerinin ve eşit dereceli terimlerinin katsayılarının eşit olması gerekir.

$$\text{der}[P(x)] = \text{der}[R(x)] \quad \text{ve} \quad a_i = b_i$$

✍ $P(x) = ax^3 + 2x^2 + bx - 8$ ve $R(x) = 4x^n - cx^2 - 3x + 2d$ polinomları eşit olduklarına göre, n, a, b, c, d değerlerini bulalım.

Polinomların derecelerinin eşit olabilmesi için $n = 3$ olmalıdır. Eşit dereceli terimlerin katsayılarının eşit olması gerektiğine göre,

$$a = 4 \quad c = -2 \quad b = -3 \quad d = -4$$

olmalıdır.



ÖRNEKLERİ
KONU ÖZETLERİ

☐ Bir $r(x)$ fonksiyonunu değişken kabul ederek verilmiş olan $P(r(x))$ polinomunun x değişkenine göre ifade edilmesi istendiğinde, x yerine $r^{-1}(x)$ ters fonksiyonu yazılarak $P(x)$ polinomu elde edilir.

Örneğin, $P(3x-3) = x-6$ olduğuna göre, $P(x+1)$ polinomunun ifadesini bulmak için önce $P(x)$ polinomunu buluruz. Bunun için de $P(3x-3)$ polinomunun ifadesinde x yerine, $3x-3$ fonksiyonunun tersi olan $\frac{x+3}{3}$ ifadesini yazalım:

$$P\left(3\frac{x+3}{3}-3\right) = \frac{x+3}{3}-6$$

$$P(x) = \frac{1}{3}x-5$$

Bu ifadede x yerine $(x+1)$ yazarak istenen sonuca varırız:

$$P(x+1) = \frac{x-14}{3}$$

Yukarıda yapılan işlemler polinomlarda değişken dönüştürme olarak adlandırılırlar.

Tüm gerçek sayıları aynı değere eşleyen polinoma **SABİT POLİNOM**, tüm gerçek sayıları sıfıra eşleyen polinoma **SIFIR POLİNOMU** adı verilir.

✍ Sabit polinomun derecesi 0, sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

✍ $P(x) = (2+a)x-4$ bir sabit polinom ise derecesi 0 olmalı, yani değişkene bağlı bir terim bulundurmamalıdır. Öyleyse $(2+a)$ çarpanının değeri sıfır, $a = -2$ olmalıdır. Benzer şekilde $R(x) = (1-a)x^3-2b$ polinomu sıfır polinomu ise $a = 1$ ve $b = 0$ olmalıdır.

➤ **POLİNOMLARDA TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMLERİ:** Polinomlar toplanırken eşit dereceli terimlerin katsayıları toplanır. Çıkarma işleminde de işlem eşit dereceli terimler arasında yapılır.

✍ $P(x) = 2x^3 + x - 1$ ve $R(x) = 2x^2 - 3x + 7$ polinomlarının toplam ve farkları

$$P(x) + R(x) = (2x^3 + x - 1) + (2x^2 - 3x + 7)$$

$$= 2x^3 + 2x^2 + x - 3x - 1 + 7$$

$$= 2x^3 + 2x^2 - 2x + 6$$

$$P(x) - R(x) = (2x^3 + x - 1) - (2x^2 - 3x + 7)$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + x + 3x - 1 - 7$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

✍ İki polinomun toplam ve farklarının derecesi en fazla, işleme giren polinomların derecelerinden büyük olana eşit olabilir.

➤ **POLİNOMLARDA ÇARPMA İŞLEMİ:** Polinomlar arasında çarpma işlemi, çarpmanın toplama üzerine dağılıma özelliğinden faydalanılarak gerçekleştirilir.

✍ $P(x) = x^2 + 4x$ ve $R(x) = 3x - 2$ polinomlarının çarpımı

$$P(x) \cdot R(x) = (x^2 + 4x)(3x - 2)$$

$$= x^2(3x - 2) + 4x(3x - 2)$$

$$= 3x^3 - 2x^2 + 12x^2 - 8x = 3x^3 + 10x^2 - 8x$$

şeklinde bulunur.

✍ Çarpım polinomun derecesi, çarpılan polinomların dereceleri toplamına eşittir.

➤ **POLİNOMLARDA BÖLME İŞLEMİ:** Bir $P(x)$ polinomu, bir $R(x)$ polinomu ile bölündüğünde, $B(x)$ bölüm polinomu ve $K(x)$ kalan polinomu elde edilir. Buna göre

$$P(x) = R(x) \cdot B(x) + K(x) \quad \text{der}[K(x)] < \text{der}[R(x)]$$

bölme özdeşliği yazılabilir.

➤ **POLİNOMLARDA İNDİRGEME:** Bir $P(x)$ polinomu, en az birinci dereceden olan bir $r(x)$ polinomu ile kalansız bölünebiliyorsa, $r(x)$ polinomu $P(x)$ polinomunun çarpanıdır, denir.

Eğer $P(x)$ polinomunun hiçbir çarpanı yoksa $P(x)$ polinomu **İNDİRGENEMEYEN POLİNOM** olarak adlandırılır. Başkatsayısı 1 olan indirgenemeyen polinoma **ASAL POLİNOM** adı verilir.

✍ $P(x) = x^2 - 1$ polinomu $(x+1)$ ve $(x-1)$ polinomları ile kalansız bölünebileceği için, indirgenemeyen bir polinom değildir ve $(x+1)$ ve $(x-1)$ polinomları $P(x)$ polinomunun çarpanlarıdır. $P(x)$ polinomu $P(x) = (x+1)(x-1)$ şeklinde yazılabilir.

$R(x) = 2x^2 + 1$ polinomunu hiçbir çarpanı bulunmadığı için bir indirgenemeyen polinomdur. $S(x) = x^2 + 1$ polinomu indirgenemez ve başkatsayısı 1 olduğundan bir asal polinomdur.

➤ **ÇARPANLARA AYIRMA:** Bir $P(x)$ polinomunun tam bölenleri olan, $r_1(x), r_2(x) \dots$ polinomlarının bulunması işlemine, $P(x)$ polinomunun çarpanlarına ayrılması adı verilir.

✓ Aşağıda açıklanacak olan çarpanlara ayırma yöntemlerinin uygulamaları, alışkanlık gerektirir. Bu nedenle, çarpanlara ayırma konusunda başarılı olmak, fazla sayıda örnek çözmeye bağlıdır.

ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMLERİ

■ **ORTAK ÇARPAN PARANTEZİNE ALMA:** Ortak çarpan parantezine alma, çarpanın toplama üzerine dağılma özelliğinin geriye alınmasıdır. Bazı ifadelerin ortak çarpan parantezine alınmadan önce gruplandırılması gerekebilir.

✍ $x^4 - x^3 - x + 1$ ifadesini ortak çarpan parantezine

$$x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3 - 1)$$

şeklinde alabiliriz. Eşitlikler tam ters yönde yazılırsa çarpanın toplama üzerine dağılma özelliği uygulanmış olacaktır.

■ **ÖZDEŞLİKLERDEN FAYDALANMA:** Polinomları, cebirde bilinen özdeşlikleri kullanarak çarpanlarına ayırmaya özdeşliklerden yararlanarak çarpanlara ayırma adı verilir.

✍ $4x^2 + 12x + 9$ ifadesi, çok bilinen $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ özdeşliği yardımıyla çarpanlarına ayrılabilir:

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$$

✍ Değişkenleri yerine yazılabilecek her sayı için doğru olan eşitliklere özdeşlik adı verilir.

ÇARPANLARA AYIRMA KONUSUNDA SIK KULLANILAN ÖZDEŞLİKLER

○ **TAM KARE ÖZDEŞLİKLERİ:**

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

○ **TAM KÜP ÖZDEŞLİKLERİ:**

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

○ **İKİ KARE FARKI ÖZDEŞLİĞİ:**

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

○ **ÜÇ TERİMLİ İÇİN TAM KARE ÖZDEŞLİĞİ:**

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

○ **İKİ KÜP İÇİN TOPLAM VE FARK ÖZDEŞLİKLERİ:**

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

○ N. DERECEDEDEN İKİ TERİM İÇİN TOPLAM VE FARK ÖZDEŞLİKLERİ:

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot$$

$$(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$x^n + y^n = (x + y) \cdot$$

$$(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad (n \text{ tek sayı için})$$

○ ÖZDEŞLİKLERİN YENİDEN DÜZENLENMESİ:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$$

■ ÖZDEŞLİĞE DÖNÜŞTÜRME: Bazı ifadeler, terim ekleme ve eksiltme yöntemi ile bazı özdeşliklere benzer hale getirilebilirler. Bu yöntem, özdeşliğe dönüştürme yöntemi adı verilir.

✍ $x^2 + 8x + 15$ ifadesini tam kare özdeşliğine dönüştürerek çarpanlarına ayıralım.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ şeklindeki tam kare özdeşliğinde eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim, ilk terimin iki katı ile sol taraftaki ikinci terimin çarpımı olmalıdır. Buna göre,

$$2xy = 8x \Rightarrow y = 4$$

olur. Verilen ifadeye, değerini değiştirmemek amacıyla $y^2 = 16$ terimini ekler ve çıkarırsak

$$x^2 + 8x + 15 + 16 - 16 = (x^2 + 8x + 16) - 1 = (x + 4)^2 - 1$$

sonucunu elde ederiz.

➤ POLİNOMLARDA OBEB VE OKEK: İki veya daha fazla polinomun OBEB ya da OKEK polinomunu bulmak için:

1. Tüm polinomlar asal çarpan polinomlarına ayrılır.
2. Ortak asal çarpan polinomların en küçük üslüleri birbiri ile çarpılarak OBEB polinomu; ortak asal çarpanların en büyük üslüleri ve ortak olmayan asal çarpanların tamamı çarpılarak OKEK polinomu elde edilir.

✍ $P(x) = x^2 - 2x - 3$ ve $R(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ polinomlarının OBEB ve OKEK polinomlarını bulalım.

İki polinom

$$P(x) = (x + 1)(x - 3) \quad R(x) = x(x + 1)(x + 3)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Buna göre

$$\text{OBEB } [P(x), R(x)] = x + 1$$

$$\text{OKEK } [P(x), R(x)] = x(x + 1)(x + 3)(x - 3)$$

olacaktır.

➤ RASYONEL İFADELER: $P(x)$ ve $R(x)$ birer polinom olmak üzere, $P(x)/R(x)$ ifadesine rasyonel ifade adı verilir.

✍ Rasyonel ifadelerle dört işlem, rasyonel sayılardakine benzer şekilde yapılır.

Bir rasyonel ifadenin pay ve paydası aynı çarpana sahipse pay ve payda bu çarpana bölünür ve bu işlem SADELEŞTİRME olarak adlandırılır.

✍ $\frac{6x^3 + 17x^2 + 12x}{2x^3 - x^2 - 6x} \div \frac{3x + 4}{x^2 - 4}$ ifadesinin en sade şeklini yazalım.

İşe iki rasyonel ifadeyi de çarpanlarına ayırarak başlarız.

$$\frac{6x^3 + 17x^2 + 12x}{2x^3 - x^2 - 6x} = \frac{x(6x^2 + 17x + 12)}{x(2x^2 - x - 6)}$$

$$= \frac{x(3x+4)(2x+3)}{x(x-2)(2x+3)}$$

$$\frac{3x+4}{x^2-4} = \frac{3x+4}{(x-2)(x+2)}$$

Bu ifadelere göre sadeleştirme yapılırsa

$$\frac{6x^3 + 17x^2 + 12x}{2x^3 - x^2 - 6x} \div \frac{3x+4}{x^2-4} = \frac{x(3x+4)(2x+3)}{x(x-2)(2x+3)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{3x+4}$$

$$= x+2$$

sonucu bulunur.

➤ **POLİNOM VE RASYONEL DENKLEMLER:** $P(x) = 0$ eşitliğine **POLİNOM DENKLEM**, $P(x)/R(x) = 0$ eşitliğine ise **RASYONEL DENKLEM** denir. Bir polinom denklemi gerçekleyen x değerlerine **POLİNOMUN KÖKLERİ** adı verilir. Bir rasyonel denklemin kökleri, sadece payını sıfıra eşitleyen değerlerdir.

✓ Bir rasyonel denklemin köklerinden biri veya birkaçı, ifadenin paydasını da sıfıra eşitliyorlarsa bu değer veya değerler kök olarak kabul edilmez.

✍ $\frac{x(x-3)(x+1)}{x^2-9} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Rasyonel denklemin kökleri pay polinomun kökleridir:

$$x(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -1$$

Ancak $x = 3$ değeri payda polinomun da kökü olduğu için rasyonel denklemin kökü olarak kabul edemeyiz. Buna göre, çözüm kümesi $\{-1, 0\}$ şeklindedir.

➤ **BASİT KESİRLERE AYIRMA:** Basit kesir olmayan rasyonel ifadeler, birden fazla basit kesrin toplamı şeklinde yazılabilir. Bunun için:

1. Paydanın her bir çarpanı için, bu çarpanı payda olarak kabul eden birer basit kesir yazılır (aynı çarpanın kuvvetleri farklı çarpan kabul edilmezler).

2. Yazılan basit kesirlerin payları paydadan bir derece küçük, katsayıları belirsiz polinomlar olarak seçilirler.

3. Yazılan bu basit kesirler birbirleri ile toplanır, payda eşitlenerek yapılan bu toplama sonucunda elde edilen pay, rasyonel ifadenin payına eşitlenir.

✍ $\frac{42x-24}{x^3+2x^2-8x}$ ifadesini basit kesirlere ayıralım.

Ifadenin paydasını çarpanlarına ayırırsak $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x+4)(x-2)$ olur. Buna göre

$$\frac{42x-24}{x^3+2x^2-8x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2}$$

eşitliğini kurabiliriz. Bu eşitliğin açılımı

$$\frac{42x-24}{x^3+2x^2-8x} = \frac{Ax^2+2Ax-8A}{x(x+4)(x-2)} + \frac{Bx^2-2Bx}{x(x+4)(x-2)} + \frac{Cx^2+4Cx}{x(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (2A-2B+4C)x - 8A}{x(x+4)(x-2)}$$

şeklindedir. Çözümü ise

$$-8A = -24 \Rightarrow A = 3 \Rightarrow \begin{cases} B+C = -3 \\ -2B+4C = 36 \end{cases} \Rightarrow B = -8 \quad C = 5$$

olur. Öyleyse verilen ifade

$$\frac{42x-24}{x^3+2x^2-8x} = \frac{3}{x} - \frac{8}{x+4} + \frac{5}{x-2}$$

şeklinde yazılabilir.