

FONKSİYONLAR

"Fonksiyon" kavramı , matematiğin en önemli konusudur. Ö.S.S Matematik II sorularını çözebilmek için fonksiyon konusunu çok iyi bilmek ve özümsemek gerekir.

TANIM:

A kümesinin her elamanını, B kümesinin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleyen A dan B ye her f bağıntısına A dan B ye bir **fonksiyon** denir.

$f : A \rightarrow B$ veya $A \xrightarrow{f} B$ şeklinde gösterilir.

A ya **TANIM** , B ye **DEĞER** kümesi adı verilir.

$(x,y) \in f$ için ; $y=f(x)$ veya $f : x \rightarrow y$ veya $x \xrightarrow{f} y$ yazılır ve y'ye x'in f fonksiyonu altındaki **görüntüsü** denir.

$f(A)=\{y : y=f(x) , x \in A\}$ kümesine de A nın f fonksiyonu altındaki **görüntü** kümesi denir.

ÖRNEK:

$A=\{0,1\}$ ve $B=\mathbb{R}$ olmak üzere ;
A dan B ye
 $f:0 \rightarrow 17$
 $f:1 \rightarrow 17$ şeklinde tanımlanan
($f=\{(0,17),(1,17)\}$)
f bağıntısı bir fonksiyondur.

! A kümesinin her elemanı eşlenmiştir.
! A kümesinin herhangi bir elemanı, birden fazla elemanla eşlenmemiştir.

ÖRNEK:

$A=\{0,1\}$ ve $B=\mathbb{R}$ olmak üzere ;
A dan B ye
 $f:0 \rightarrow 17$
 $f:0 \rightarrow 20$
 $f:1 \rightarrow 17$ şeklinde tanımlanan
($f=\{(0,17),(0,20),(1,17)\}$)
f bağıntısı bir fonksiyon değildir.

! A kümesinin her elemanı eşlenmiştir.
! A kümesinin elemanlarından 0 , hem 17 ile hem de 20 ile eşlenmiştir.

ÖRNEK:

$f(1)=3$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(-1)=7$
($f=\{(1,3),(2,3),(3,4),(-1,7)\}$)

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için ;

a) f fonksiyonunun tanım kümesini yazınız? $Y: \{1,2,3,-1\}$

b) f fonksiyonunun görüntü kümesini yazınız? $Y: \{3,4,7\}$

ÖRNEK:

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ şeklinde tanımlanan

f fonksiyonu için $f(2)=?$

$$f(2) = \frac{2}{2^2 + 1} = \frac{2}{5}$$

ÖRNEK:

$f(x)=x^2$ şeklinde tanımlanan
f fonksiyonu için;

Tanım kümesi \mathbb{R} alınırsa $f(\mathbb{R})=?$

$$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$$

Tanım kümesi $[-3,2]$ alınırsa $f([-3,2])=?$

$$f([-3,2]) = [0,9]$$

ÖRNEK:

$f(x) = x^2$ fonksiyonu için ;

$$f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 ,$$

$$f(x^2) = (x^2)^2 = x^4 \text{ olur.}$$

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu için ;

$$f(x^2) = \sin x^2 ,$$

$$f(\sqrt{x+1}) = \sin \sqrt{x+1} \text{ olur.}$$

UYARI:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + 10$ şeklindeki
polinom fonksiyonlar x'in tüm gerçel değerleri için tanımlıdır.

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \quad \text{fonksiyonunun}$$

tanım kümesini bulunuz.

UYARI:

Rasyonel fonksiyonlarda payda sıfır olamaz.
Kareköklü fonksiyonlarda , karekök içindeki ifade negatif olamaz.

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$(x-1)(x-2) > 0$$

$$\text{fonksiyonun tanım kümesi : } (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x < 0 \text{ ise} \\ x^2 & ; x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için ;

$$f(-2) = -2 \quad , \quad f(-1/2) = -1/2 \quad , \quad f(0) = 0 \quad , \quad f(1/2) = 1/4 \quad , \quad f(3) = 9 \text{ dur.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & ; x \leq -3 \text{ ise} \\ 2x+9 & ; -3 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ x^3 - c & ; x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

ifadesinin bir fonksiyon tanımladığı bilindiğine göre c kaçtır?

$$f(3) = 2(3)+9=6+9=15$$

$$f(3) = 3^3 - c = 27 - c$$

$$27 - c = 15 \text{ olmalıdır. } c = 12 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \quad \text{fonksiyonunun}$$

tanım kümesini bulunuz.

$$x-1 \geq 0 \text{ ve } x \geq 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{aynı zamanda } x-2 \neq 0 \text{ ve } x \neq 2 \text{ olmalıdır.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}} \quad \text{fonksiyonunun}$$

tanım kümesini bulunuz?

$$2x^2 - 1 > 0 \quad x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ veya } x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ÖRNEK:

$$g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1} \quad \text{fonksiyonunun}$$

tanım kümesini bulunuz?

$$\begin{aligned} 4-x^2 &\geq 0 & -2 \leq x \leq 2 & \text{ ve} \\ x-1 &\neq 0 & x &\neq 1 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$h(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \quad \text{fonksiyonunun}$$

tanım kümesini bulunuz?

$$\begin{aligned} 1-x &\geq 0 & x &\leq 1 & \text{ ve} \\ 1+x &> 0 & x &> -1 & \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$

Tanım kümesi $-1 < x \leq 1$ dir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{ve} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz?

$$f(x) \text{ için : } \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \text{ ve } x \neq -1 \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{Tanım kümesi : } (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$$

$$g(x) \text{ için : } \begin{aligned} x-1 &\geq 0 & x &\geq 1 & \text{ ve} \\ x+1 &> 0 & x &> -1 & \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$

$$\text{Tanım kümesi : } [1, \infty)$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt[4]{2x-1} + \frac{1}{x-1}$ fonksiyonunun
tanım kümesini bulunuz?

$$\begin{aligned} 2x-1 &\geq 0 & x &\geq \frac{1}{2} & \text{ve} \\ x-1 &\neq 0 & x &\neq 1 & \text{olmalıdır.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \frac{1}{3+\sqrt{x^2-4}}$ fonksiyonunun
tanım ve görüntü kümelerini bulunuz?

$$\begin{aligned} \text{Tanım kümesi : } x^2-4 &\geq 0 \\ &(-\infty, -2] \cup [2, \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Görüntü kümesi : } \frac{1}{3+\sqrt{x^2-4}} &= y \\ 3+\sqrt{x^2-4} &= \frac{1}{y} \\ \sqrt{x^2-4} &= \frac{1}{y} - 3 \\ 0 \leq \sqrt{x^2-4} &= \frac{1}{y} - 3 \\ 0 \leq \frac{1}{y} - 3 & \\ y \leq \frac{1}{3} & \text{ ve } y > 0 \\ 0 < y \leq \frac{1}{3} & \end{aligned}$$

FONKSİYONLARIN EŞİTLİĞİ:

Tanım kümeleri eşit f ve g fonksiyonları
verildiğinde ; tanım kümesinin her x elemanı
için $f(x) = g(x)$ oluyorsa $f = g$ dir denir.

ÖRNEK:

$f(x) = x$ ve $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$ fonksiyonları
eşitmidir?

Her iki fonksiyonun tanım kümeleri \mathbb{R} dir.

$$g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)}{x^2+1} = x = f(x)$$

olduğundan $f = g$ dir.

ÖRNEK:

$f(x) = x$ ve $g(x) = \frac{x^3-x}{x^2-1}$ fonksiyonları
eşitmidir?

f fonksiyonunun tanım kümesi \mathbb{R} dir.
 g fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ dir.

Tanım kümeleri eşit olmadığından $f \neq g$ dir.

ÖRNEK:

$$f(x) = x+2 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & x \neq 1 \text{ için} \\ 3 & x = 1 \text{ için} \end{cases}$$

fonksiyonları eşitmidir?

Her iki fonksiyonun tanım kümeleri \mathbb{R} dir.

$$\begin{aligned} x \neq 1 \text{ için } g(x) &= \frac{x^2+x-2}{x-1} \\ &= \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = x+2 = f(x) \end{aligned}$$

olduğundan $f = g$ dir.

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \quad \text{ve}$$

$$g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \quad \text{fonksiyonları eşitmidir?}$$

$$x+1 \geq 0 \quad \text{ve} \quad x \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \neq 0$$

Her iki fonksiyonun tanım kümeleri $[0, \infty)$ dur.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = g(x)$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} \quad \text{ve}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + x} + x \quad \text{fonksiyonları eşitmidir?}$$

$x = 0$ için ; f fonksiyonu tanımsız ,
 g fonksiyonu tanımlıdır.

Tanım kümeleri eşit olmadığından $f \neq g$ dir.

$$\star \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{için ;} \quad (kf)(x) = kf(x)$$

f ve kf fonksiyonlarının tanım kümeleri eşittir.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^2, \quad 5f(x) = 5x^2$$

$$g(x) = \sin x, \quad \frac{1}{2}g(x) = \frac{1}{2}\sin x$$

$$\star \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Toplam fonksiyonun tanım kümesi ,
fonksiyonların tanım kümelerinin kesişimidir.

$$\star \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Çarpım fonksiyonun tanım kümesi ,
fonksiyonların tanım kümelerinin kesişimidir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ve} \quad g(x) = \sin x \quad \text{için ;}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sin x$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sin x$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x} \sin x$$

f fonksiyonunun tanım kümesi $[0, \infty)$,

g fonksiyonunun tanım kümesi \mathbb{R} dir.

$f+g$, $f-g$ ve fg fonksiyonlarının
tanım kümeleri $[0, \infty) \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$ dur.

$$\star \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

Bölüm fonksiyonun tanım kümesi , $g(x) \neq 0$
Koşuluyla fonksiyonların tanım kümelerinin
kesişimidir.

ÖRNEK.

$$f(x) = x^3 \quad \text{ve} \quad g(x) = x^2 - 1 \quad \text{için ;}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Her iki fonksiyonun tanım kümeleri \mathbb{R} dir.
 $g(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$, $x=1$ veya $x=-1$

Bölüm fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

FONKSİYONLAR

BİLEŞKE FONKSİYON:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

şeklinde tanımlanan $f \circ g$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir.

$f \circ g$ fonksiyonunun tanım kümesi ,
 g fonksiyonunun tanım kümesine eşittir.

g fonksiyonunun görüntü kümesi ,
 f fonksiyonunun tanım kümesinin bir alt kümesi olmalıdır.

ÖRNEK:

$f(x) = \sin x$ ve $g(x) = x^2$
fonksiyonları için;

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$$

g fonksiyonunun görüntü kümesi $[0, \infty)$
 f fonksiyonunun tanım kümesi \mathbb{R} olup,
 $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ dir.

$f \circ g$ fonksiyonunun tanım kümesi ,
 g fonksiyonunun tanım kümesine eşit olup
 \mathbb{R} dir

ÖRNEK:

$f(x) = x^5$, $g(x) = \sin x$ ve $h(x) = \sqrt{x}$
fonksiyonları için;

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) =$$

$$f(g(\sqrt{x})) = f(\sin \sqrt{x}) = (\sin \sqrt{x})^5 = \sin^5 \sqrt{x}$$

ÖRNEK:

$y = u^4$, $u = v^2 + 1$ ve $v = \sin x$ için ,
 y nin , x cinsinden ifadesi nedir?

$u = v^2 + 1$ ve $v = \sin x$ olduğundan

$$u = \sin^2 x + 1 \text{ dir.}$$

$y = u^4$ ve $u = \sin^2 x + 1$ olduğundan

$$y = (\sin^2 x + 1)^4 \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$F(x) = (3x^3 - 2x + 1)^6$ fonksiyonunu
 f ve g fonksiyonlarının bileşkesi olarak
ifade ediniz?

$f(x) = x^6$ ve $g(x) = 3x^3 - 2x + 1$ olarak
alınırsa ;

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^6$$

$$= (3x^3 - 2x + 1)^6 = F(x)$$

✚ $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği
verildiğinde ; $c > 0$ için

$g(x) = f(x-c)$ fonksiyonunun grafiğini çizmek
istersek , $y = f(x)$ in grafiği c birim SAĞA
kaydırılır.

$g(x) = f(x+c)$ fonksiyonunun grafiği için ,
 $y = f(x)$ in grafiği c birim SOLA kaydırılır.

$g(x) = f(x)+c$ fonksiyonunun grafiğini çizmek
istersek , $y = f(x)$ in grafiği c birim
YUKARI kaydırılır.

$g(x) = f(x)-c$ fonksiyonunun grafiği için ,
 $y = f(x)$ in grafiği c birim
AŞAĞI kaydırılır.

✚ Fonksiyonlar ;

- 1- Polinom Fonksiyonlar
- 2- Rasyonel Fonksiyonlar
- 3- Cebirsel Fonksiyonlar

olarak sınıflandırılabilirler.

$n \in \mathbb{N}^+$ için ;

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

şeklindeki fonksiyonlara n . dereceden
POLİNOM FONKSİYON denir.

Tanım kümeleri \mathbb{R} dir.

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere ;

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ şeklindeki fonksiyonlara}$$

RASYONEL FONKSİYON denir.

Tanım kümeleri $\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ dir.

FONKSİYONLAR

LİMİT

x 'i a 'nın yeterince küçük bir komşuluğu içinde aldığımızda, $f(x)$ 'in olabildiğince yaklaşabileceği bir L sayısı varsa ;

x a 'ya yaklaşırken $f(x)$ 'in limiti L 'dir denir,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ yazılır.}$$

✚ $a, c \in \mathbb{R}$ için;
 $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ dir.

✚ $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ dir.

✚ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

✚ $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

✚ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

✚ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right)$

✚ $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$

SÜREKLİLİK:

Tanım kümesindeki a sayısı için;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ ise}$$

f fonksiyonu $x=a$ noktasında **sürekli**dir denir.

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 17, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu ;

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 = f(2) \text{ olduğundan}$$

$x=2$ için sürekli ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) \text{ olduğundan}$$

$x=0$ için sürekli değildir.

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 1) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9$$

✚ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ şeklindeki polinom fonksiyonlar için ;
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ dir. ($a \in \mathbb{R}$)

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^3 + x - 4} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 + x - 4)} \\ &= \frac{(-1)^2 - 3(-1) + 2}{2(-1)^3 + (-1) - 4} = \frac{6}{-7} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -\frac{6}{7}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 6} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - 4x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 6)} \\ &= \frac{2^3 - 2^2 - 4(2) + 3}{2^2 + 3(2) - 6} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = -\frac{1}{4}$$

✚ $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

şeklindeki Rasyonel fonksiyonlar için;

a tanım kümesinin bir elemanı ise

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ dir.}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 + x - 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 4x + 3) = (-1)^2 + 4(-1) + 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x - 1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(2x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{2x-1} = -\frac{2}{3}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + x - 6} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - 2x) = 2^3 - 2^2 - 2(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6) = 2^2 + 2 - 6 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+1)}{x+3} = \frac{6}{5}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x - 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(3x-1)(x+1)}{3x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (x+1) = \frac{4}{3}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{-2} - 2t^{-1} + 1}{t^{-1} - t^{-2}} = ?$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{-2} - 2t^{-1} + 1}{t^{-1} - t^{-2}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{-2}(1 - 2t + t^2)}{t^{-2}(t - 1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)^2}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} (t-1) = 0$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+1)^3}{2x^2 + 1} = \frac{3000}{19}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 1)^{23} = 10^{23}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{17x^3 + 23x^2 + 9} = 7$$

FONKSİYONLAR

✚ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ve b, f 'in tanım kümesinde ise ;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

✚ $n \in \mathbb{N}$ ve a , tanım kümesinde ise ;

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{için :}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad \text{dır.}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4}-2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4}-2}{x} \frac{\sqrt{3x+4}+2}{\sqrt{3x+4}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3x+4}+2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

✚ $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ dir.

ÖRNEK:

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2+3x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+3x)} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{t \rightarrow -1} (t^3 - 5t + 1)^{\frac{2}{3}} = \left(\lim_{t \rightarrow -1} (t^3 - 5t + 1) \right)^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2}{3}}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[4]{x^3 - 2x} = \sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 2x)} = \sqrt[4]{56}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 5)^{\frac{3}{2}} &= \left[\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 5)^3 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= [4^3]^{\frac{1}{2}} = 8 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x^2-3x-3}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{2x}} = \frac{\sqrt[3]{4^2-3(4)-3}}{\sqrt{4}+\sqrt[3]{2(4)}} = \frac{1}{4}$$

FONKSİYONLAR

✚ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ve
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ise
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dir.

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad (x \neq 0 \text{ için})$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$g(x) = -x^2 \text{ ve } h(x) = x^2 \text{ dersek}$$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \text{ olduğundan ;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ dir.}$$

✚ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ dir.

✚ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dir.

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin \frac{x}{2} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \\ &= 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4(1) = 4$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{5}}{x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 99x}{x} = 99 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 99x}{99x} = 99$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 99x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 99x}{x}} = \frac{1}{99}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{x} = 7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{7x} = 7 \cdot 1 = 7$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \frac{\sin 4x}{4x}}{6 \frac{\sin 6x}{6x}} = \frac{4}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin 6x}{6x}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \frac{\sin 5x}{5x}}{3 \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{5}}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}}}{\frac{\sin 3x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5} \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}}}{3 \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{5}}{\frac{x}{5}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 8x}{\tan 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 8x}{x}}{\frac{\tan 4x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \frac{\tan 8x}{8x}}{4 \frac{\tan 4x}{4x}} = \frac{8}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 8x}{8x} = 2\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \leq 2 \\ x^3 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 = 2^3 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ YOK}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 - 3x + 1 & ; \quad x < -1 \\ 3 - 3x^2 - 2x^3 & ; \quad x \geq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (6x^2 - 3x + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} (6(-1)^2 - 3(-1) + 1) = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 - 3x^2 - 2x^3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 - 3(-1)^2 - 2(-1)^3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ YOK}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \leq -2 \\ 1 - 2x^3 & ; -2 < x \leq 1 \\ 7x - 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = ? \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} ((-2)^2 - 2(-2)) = 8 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (1 - 2x^3) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (1 - 2(-2)^3) = 17 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ YOK}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - 2x^3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - 2(1)^3) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (7x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (7(1) - 1) = 6 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ YOK}$$

 $a \in \mathbb{R}$ için ;
 $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$ dır.

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$a + (+\infty) = +\infty$$

$$a + (-\infty) = -\infty$$

$$a < 0 \Rightarrow a(+\infty) = -\infty$$

$$a > 0 \Rightarrow a(+\infty) = +\infty$$

$$a < 0 \Rightarrow a(-\infty) = +\infty$$

$$a > 0 \Rightarrow a(-\infty) = -\infty$$

$$a < 0 \Rightarrow \frac{a}{0^-} = +\infty, \quad \frac{a}{0^+} = -\infty$$

$$a > 0 \Rightarrow \frac{a}{0^-} = -\infty, \quad \frac{a}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{a}{\pm \infty} = 0$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty} \text{ BELİRSİZ}$$

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ BELİRSİZ}$$

$$0 \cdot (\pm \infty) \text{ BELİRSİZ}$$

$$\frac{0}{0} \text{ BELİRSİZ}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{1+x} = \frac{-1}{0^-} = \infty$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{6-x-x^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \text{ YOK}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow -1} |2x^2 + 3x - 5| = \left| \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 3x - 5) \right| = |-6| = 6$$

ÖRNEK:

$$\lim_{t \rightarrow 4} \left| \frac{t-6}{\sqrt{2t+1}} \right| = \left| \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t-6}{\sqrt{2t+1}} \right| = \frac{2}{3}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ YOK}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \leq 2 \\ x^2 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ YOK}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 5) = 2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6x - 1) = 6(1) - 1 = 5$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x - 1) = 3(-1) - 1 = -4$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} (7 - \frac{2}{5}x) = \frac{32}{5}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 2) = 8$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow -3} (4 - 6x) = 22$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

✚ f ve g fonksiyonları $x=a$ noktasında sürekli, $a, c \in \mathbb{R}$ için ;

$f + g$ fonksiyonu $x=a$ da sürekli dir.

$c \cdot f$ fonksiyonu $x=a$ da sürekli dir.

$f \cdot g$ fonksiyonu $x=a$ da sürekli dir.

$\frac{f}{g}$ fonksiyonu $x=a$ da sürekli dir. ($g(a) \neq 0$)

FONKSİYONLAR

TÜREV

$y = f(x)$ fonksiyonu için ;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{limitine fonksiyonun}$$

türevi denir .

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{veya} \quad f'(x) \quad \text{şeklinde gösterilir.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ifadesine ;}$$

$y = f(x)$ in $x = a$ daki türevidir.

$x = a+h$ dersek , $h = x-a$ olur ki ;
 $h \rightarrow 0$ için $x \rightarrow a$ dır. Bu durumda:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

fonksiyonun $x = a$ daki türevidir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki $P(a, f(a))$ noktası için ;

$$m_t = f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

değeri grafiğin P noktasındaki teğetin eğimidir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki $P(a, f(a))$ noktası için ;

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

teğet denklemdir.

$s = f(t)$ yol-zaman denkleminde ;

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

değeri hareketlinin hızını verir.

ÖRNEK:

$f(x) = 3x^2$ fonksiyonunun $a = 1$ için türevi?

$$f(a) = f(1) = 3$$

$$f(a+h) = f(1+h) = 3(1+h)^2 = 3+6h+h^2$$

$$f(a+h) - f(a) = 6h+3h^2$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{6h+3h^2}{h} = 6+3h$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+3h) = 6$$

$f(x) = 3x^2$ nin $x=1$ deki teğet denklemi :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = 3+6(x-1)$$

$$y = 6x-3$$

ÖRNEK:

$f(x) = 5x^2-2$ fonksiyonunun $a=1$ için türevi?

$$f(a) = f(1) = 3$$

$$f(a+h) = f(1+h) = 5(1+h)^2 - 2 = 3+10h+5h^2$$

$$f(a+h) - f(a) = 10h+5h^2$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{10h+5h^2}{h} = 10+5h$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10+5h) = 10$$

$f(x) = 5x^2-2$ nin $x=1$ deki teğet denklemi :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = 3+10(x-1)$$

$$y = 10x-7$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun $a=2$ için türevi ?

$$f(a)=f(2)=4$$

$$f(a+h)=f(2+h)=(2+h)^2=4+4h+h^2$$

$$f(a+h)-f(a)=4h+h^2$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = 4+h$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4$$

$f(x)=x^2$ nin $x=2$ deki teğet denklemi :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y=4(x-2)+4 \quad y=4x-4$$

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt{2x}$ fonksiyonunun $x=3$ için türevi ?

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{6+2h}-\sqrt{6}}{h} = \frac{\sqrt{6+2h}-\sqrt{6}}{h} \cdot \frac{\sqrt{6+2h}+\sqrt{6}}{\sqrt{6+2h}+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6+2h}+\sqrt{6}}$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{6+2h}+\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \text{ rasyonel.} \\ 0 & ; x \text{ irrasyonel} \end{cases}$$

fonksiyonu için $f'(0)=0$ dır.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ÖRNEK:

$f(x) = x^2$ için $f'(x) = ?$

$$f(x+h)-f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2hx+h^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$$

ÖRNEK:

$f(x) = 5x^2-2$ için $f'(x) = ?$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[5(x+h)^2-2] - (5x^2-2)}{h}$$

$$= 10x + 5h^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h^2) = 10x$$

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt{2x}$ için $f'(x) = ?$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x+2h}+\sqrt{2x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2h}+\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$f(x) = \sqrt{3x} \quad \text{için} \quad f'(x) = ?$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3x+3h} + \sqrt{3x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3x+3h} + \sqrt{3x}} = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{için} \quad f'(x) = ?$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

TEOREM:

f fonksiyonunun tanım kümesinin bir a elemanı türevi bulunabiliyorsa , f fonksiyonu bu noktada süreklidir.

SONUÇ: f fonksiyonu x = a noktasında sürekli değil ise , f fonksiyonunun x = a için türevi alınamaz.

ÖRNEK :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 0 \\ x+1 & ; x > 0 \end{cases}$$

f fonksiyonunun x=0 da türevli olmadığını gösteriniz.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \neq f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ yoktur}$$

f fonksiyonu x = 0 da sürekli değildir.

x = 0 da sürekli olmayan f fonksiyonunun x = 0 da türevi alınamaz.

SOLDAN VE SAĞDAN TÜREV:

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

NOT: f fonksiyonunun sol (veya sağ) limitinden söz edilebilmesi için, fonksiyonun o noktanın solunda (veya sağında) tanımlı olması gerekir.

TEOREM:

f fonksiyonu açık aralıkta tanımlı ,
bu aralıktaki bir x değeri için türevli olması
için gerek ve yeter koşul ;
bu noktada soldan ve sağdan türevlerinin var
ve eşit olmasıdır.

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$f(x) = |x|$$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türevini araştırınız?

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0)$ olduğundan
 $f'(0)$ yoktur.'

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x^2 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için $f'(0) = ?$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0$$

$f'_-(0) = 0 = f'_+(0)$ olduğundan
 $f'(0) = 0$ dir.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki türevini araştırınız?

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^{\frac{2}{3}} - 0}{h} = \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = -\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

$f'_-(0) = -\infty \neq +\infty = f'_+(0)$ olduğundan
 $f'(0)$ yoktur.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki türevini araştırınız?

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$f'_-(0) = f'_+(0) = +\infty$$

Hareketlinin doğru boyunca t zamanda aldığı yol s ile gösterildiğinde ;

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = v'(t)$$

t anındaki HIZ'ı verir.

FONKSİYONLAR

✚ $c \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = c$ için ; $f'(x) = 0$ dir.

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

✚ $n \in \mathbb{N}$ ve $f(x) = x^n$ için ; $f'(x) = nx^{n-1}$ dir.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

ÖRNEK:

$$\frac{dx^4}{dx} = 4x^3, \quad \frac{dx^{123}}{dx} = 123x^{122}$$

$$\frac{ds^5}{ds} = 5s^4, \quad \frac{dw^{10}}{dw} = 10w^9$$

TEOREM:

Bir açık aralıkta tanımlı ve bu aralıktaki $x=a$ için türevli olan f ve g fonksiyonları için ;

$$cf, f+g, f-g, fg \text{ ve } \frac{f}{g} \quad (g'(a) \neq 0)$$

fonksiyonları da $x = a$ için türevlidir.

$$\text{✚ } (cf)'(a) = cf'(a)$$

$$u = f(x) \text{ için } \frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d(4x^6)}{dx} = 4 \frac{dx^6}{dx} = 4(6x^5) = 24x^5$$

$$\frac{d(21s^3)}{ds} = 21 \frac{ds^3}{ds} = 21(3s^2) = 63s^2$$

$$\frac{d\left(\frac{5}{4}w^4\right)}{dw} = \frac{5}{4} \frac{dw^4}{dw} = \frac{5}{4}(4w^3) = 5w^3$$

$$\text{✚ } (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$u = f(x)$ ve $v = g(x)$ için:

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(3x^4 - 6x^5) &= \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(6x^5) \\ &= 3 \frac{dx^4}{dx} - 6 \frac{dx^5}{dx} = 3(4x^3) - 6(5x^4) \\ &= 12x^3 - 30x^4 \end{aligned}$$

$$\text{✚ } (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$u = f(x)$ ve $v = g(x)$ için:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^3(2x^9 - 12) &= ? \\ &= \frac{dx^3}{dx}(2x^9 - 12) + x^3 \frac{d}{dx}(2x^9 - 12) \\ &= 3x^2(2x^9 - 12) + x^3(18x^8) \\ &= 6x^{11} - 36x^2 + 18x^{11} = 24x^{11} - 36x^2 \\ &= 12x^2(2x^9 - 3) \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$y = x^{12}(1+x^2) \text{ için } \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^{12}(1+x^2) \\ &= \frac{dx^{12}}{dx}(1+x^2) + x^{12} \frac{d}{dx}(1+x^2) \\ &= 12x^{11}(1+x^2) + x^{12}(2x) = 2x^{11}(7x^2 + 6) \end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$$

$$r \in \mathbb{Q} \text{ için ; } \frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1} \text{ dir.}$$

$u = f(x)$ ve $v = g(x)$ için:

$$\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{3x^3 - 2x}{4 - 5x^2} &= ? \\ &= \frac{(9x^2 - 2)(4 - 5x^2) - (3x^3 - 2x)(-10x)}{(4 - 5x^2)^2} \\ &= \frac{3x^2(12 - 5x^2)}{(4 - 5x^2)^2} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} w &= \frac{s^2}{3s^4 - 2} \text{ için } \frac{dw}{ds} = ? \\ \frac{dw}{ds} &= \frac{\frac{ds^2}{ds}(3s^4 - 2) - s^2 \frac{d}{ds}(3s^4 - 2)}{(3s^4 - 2)^2} \\ &= \frac{2s(3s^4 - 2) - s^2(12s^3)}{(3s^4 - 2)^2} = \frac{2s(3s^4 + 2)}{(3s^4 - 2)^2} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{7x^6}{6x^8 - 1} &= ? \\ &= \frac{\frac{d7x^6}{dx}(6x^8 - 1) - 7x^6 \frac{d}{dx}(6x^8 - 1)}{(6x^8 - 1)^2} \\ &= \frac{42x^5(6x^8 - 1) - 7x^6(48x^7)}{(6x^8 - 1)^2} \\ &= -\frac{42x^5(2x^8 + 1)}{(6x^8 - 1)^2} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\frac{dx^{-3}}{dx} = -3x^{-4} \quad \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds^{\frac{1}{2}}}{ds} = -\frac{1}{2}s^{-\frac{3}{2}} \quad \frac{dw^{\frac{7}{3}}}{dw} = \frac{7}{3}w^{\frac{4}{3}}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} \frac{5}{x^4} = 5 \frac{dx^{-4}}{dx} = -20x^{-5} = -\frac{20}{x^5}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} x\sqrt{x} = \frac{d}{dx} xx^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} \frac{6}{x^2\sqrt{x}} = \frac{d}{dx} \frac{6}{x^{\frac{5}{2}}} = 6 \frac{dx^{-\frac{5}{2}}}{dx} = -15x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{x^3\sqrt{x}}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x} + 1} &= \frac{2x(\sqrt{x} + 1) - (x^2 + 1)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{(\sqrt{x} + 1)^2} \\ &= \frac{2x\sqrt{x} + 2x - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{\frac{3}{2}x\sqrt{x} + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} \end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

✚ $y = f(x)$ fonksiyonu için ;

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ şeklinde gösteriliyordu.

$dy = f'(x)dx$ ifadesine

y'nin **diferansiyeli** denir.

ÖRNEK:

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad \text{ise} \quad F'(x) = ?$$

$$F'(x) = -4x^{-5} f'\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

✚ $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ fonksiyonları için ;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK:

$$F(x) = [g(x)]^6 \quad \text{ise} \quad F'(x) = ?$$

$$F'(x) = 6[g(x)]^5 g'(x)$$

✚ $u = f(x)$ ve $r \in \mathbb{Q}$ için ;

$$\frac{du^r}{dx} = ru^{r-1} \frac{du}{dx} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(5x^4 - 12x^2)^3 &= ? \\ &= 3(5x^4 - 12x^2)^2 (20x^3 - 24x) \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$F(x) = (x^2 + 1)^{10} \quad \text{ise} \quad F'(x) = ?$$

$$F'(x) = 10(x^2 + 1)^9 2x = 20x(x^2 + 1)^9$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(3x^3 - 6x)^{\frac{1}{2}} &= ? \\ &= \frac{1}{2}(3x^3 - 6x)^{-\frac{1}{2}}(9x^2 - 6) \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$F(x) = (3x^3 - x)^7 \quad \text{ise} \quad F'(x) = ?$$

$$F'(x) = 7(3x^3 - x)^6 (9x^2 - 1)$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1 - 3x^3)^{10} &= 10(1 - 3x^3)^9 (-9x^2) \\ &= -90x^2(1 - 3x^3)^9 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$F(x) = (3x^4 + 5x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ise} \quad F'(x) = ?$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(3x^4 + 5x)^{-\frac{1}{2}}(12x^3 + 5)$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s^4 - s + 1)^{\frac{3}{4}}} &= ? \\ &= \frac{d}{ds} (s^4 - s + 1)^{-\frac{3}{4}} \\ &= -\frac{3}{4}(s^4 - s + 1)^{-\frac{7}{4}}(4s^3 - 1) \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$F(x) = f(x^3) \quad \text{ise} \quad F'(x) = ?$$

$$F'(x) = 3x^2 f'(x^3)$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(4x^2 + 1)^{23} &= 23(4x^2 + 1)^{22}(8x) \\ &= 184x(4x^2 + 1)^{22}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 &= ? \\ &= 5\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 \left(\frac{1(1+x) - 1 \cdot x}{(1+x)^2}\right) = \frac{5x^4}{(1+x)^6}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^3\sqrt{1+3x^2} &= ? \\ &= \frac{d}{dx}x^3(1+3x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3x^2(1+3x^2)^{\frac{1}{2}} + x^3 \frac{1}{2}(1+3x^2)^{-\frac{1}{2}}(6x) \\ &= \frac{3x^2(4x^2+1)}{\sqrt{1+3x^2}}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^4(2x+1)^{\frac{3}{2}} &= ? \\ &= 4x^3(2x+1)^{\frac{3}{2}} + x^4 \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}(2) \\ &= x^3(11x+4)\sqrt{2x+1}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dw} \frac{w\sqrt{w}}{(3w^3+1)^6} &= ? \\ &= \frac{d}{dw} \frac{w^{\frac{3}{2}}}{(3w^3+1)^6} \\ &= \frac{\frac{3}{2}w^{\frac{1}{2}}(3w^3+1)^6 - w^{\frac{3}{2}}(6)(3w^3+1)^5(9w^2)}{(3w^3+1)^{12}} \\ &= \frac{3\sqrt{w}(1-33w^3)}{2(3w^3+1)^7}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \frac{(s+1)^3}{(2s+1)^5} &= ? \\ &= \frac{3(s+1)^2(2s+1)^5 - (s+1)^3(5)(2s+1)^4(2)}{(2s+1)^{10}}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \cdot \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cdot \cot x$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx}(3\cos x) = -3\sin x$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dt}(-5\sec t) = -5\sec t \cdot \tan t$$

ÖRNEK:

$y = \sin x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{3}$ noktasındaki teğetinin denklemini yazınız?

$$m_t = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$y = \tan x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{3}$ noktasındaki teğetinin denklemini yazınız?

$$m_t = f' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sec^2 \frac{\pi}{3} = 4$$

$$P \left(\frac{\pi}{3}, \tan \frac{\pi}{3} \right) \rightarrow P \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3} \right)$$

$$y - \sqrt{3} = 4 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

ÖRNEK:

$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$ olduğunu kanıtlayınız?

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^3 \sin x &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x \\ &= x^2 (3 \sin x + x \cos x) \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} \sin 6x^3 = 18x^2 \cos 6x^3$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} \sin x^2 = 2x \cos x^2$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos 3x^4 &= 12x^3 (-\sin 3x^4) \\ &= -12x^3 \sin 3x^4 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} \tan(\sin x) = (\cos x) \sec^2(\sin x)$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(\tan^4 3x^3) &= ? \\ &= \cos(\tan^4 3x^3) \frac{d}{dx} \tan^4 3x^3 \\ &= \cos(\tan^4 3x^3) 4 \tan^3 3x^3 \frac{d}{dx} \tan 3x^3 \\ &= \cos(\tan^4 3x^3) 4 \tan^3 3x^3 \cdot \sec^2 3x^3 \frac{d}{dx} 3x^3 \\ &= \cos(\tan^4 3x^3) \cdot 4 \tan^3 3x^3 \cdot \sec^2 3x^3 \cdot 9x^2 \\ &= 36x^2 (\sec^2 3x^3) (\tan^3 3x^3) \cdot \cos(\tan^4 3x^3) \end{aligned}$$

$$+ \frac{d}{dx} \sin u = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$+ \frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$+ \frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$+ \frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$+ \frac{d}{dx} \sec u = \sec u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$+ \frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cdot \cot u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$+ F(x, y) = 0 \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$+ x = f(t) \text{ ve } y = g(t) \text{ ise } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$f(x) = x^5 \quad \text{için ; } f'(x) = ? \quad \text{ve} \quad f''(x) = ?$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 & f'(x) &= 5x^4 \\ f''(x) &= 20x^3 & f'''(x) &= 60x^2 \\ f^{(4)}(x) &= 120x & f^{(5)}(x) &= 120 \\ f^{(6)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad n \geq 6$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} y &= \sin 2x \\ y' &= 2\cos 2x \\ y'' &= -4\sin 2x \\ y''' &= -8\cos 2x \\ y^{(4)} &= 16\sin 2x \\ y^{(5)} &= 32\cos 2x \\ y^{(6)} &= -64\sin 2x \end{aligned}$$

$$y^{(n)} = 2^n \sin(2x + \frac{n\pi}{2}) \quad n=1,2,3,4, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{✚} \quad y' &= \frac{dy}{dx} \\ y'' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \\ y''' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3} \\ y^{(4)} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right) = \frac{d^4 y}{dx^4} \\ y^{(n)} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{dx^n} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} y &= x^4 \quad \text{için ;} \\ \frac{dy}{dx} &= 4x^3, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 12x^2, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 24x \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= 24, \quad \frac{d^5 y}{dx^5} = 0, \quad \dots \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{x}{2x+1} \quad \text{için ;}$$

$$y' = \frac{(1)(2x+1) - x(2)}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2} = (2x+1)^{-2}$$

$$y'' = (-2)(2x+1)^{-3}(2) = -4(2x+1)^{-3}$$

$$y''' = (-4)(-3)(2x+1)^{-4}(2) = 24(2x+1)^{-4}$$

ÖRNEK:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \pm \sqrt{1-x^2} \quad (|x| \leq 1)$$

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$y = -\sqrt{1-x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ için, } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ için, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK:

$$x^{10} - 2xy - y^{10} = 0 \quad \text{için } y = ?$$

$$y = \text{??????}$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{??????}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d1}{dx}$$

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 0$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ için, } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ için, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK:

$$x^{10} - 2xy - y^{10} = 0 \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{d}{dx}(x^{10} - 2xy - y^{10}) = \frac{d0}{dx}$$

$$\frac{dx^{10}}{dx} - \frac{d2xy}{dx} - \frac{dy^{10}}{dx} = 0$$

$$10x^9 - 2\left(1 \cdot \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx}\right) - 10y^9 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(5y^9 + x) \frac{dy}{dx} = 5x^9 - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^9 - y}{5y^9 + x}$$

ÖRNEK:

$$x \sin xy = 1 \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{d}{dx} x \sin xy = \frac{d1}{dx}$$

$$(1) \sin xy + x \frac{d}{dx} \sin xy = 0$$

$$\sin xy + x \cos xy \cdot \frac{d}{dx} xy = 0$$

$$\sin xy + x \cos xy \left(1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\sin xy + xy \cos xy + x^2 \cos xy \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin xy + xy \cos xy}{x^2 \cos xy}$$

ÖRNEK:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) = \frac{d1}{dx}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{9} y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$x^2 y^7 - x^3 y^2 = 1 \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 y^7 - x^3 y^2) = \frac{d1}{dx}$$

$$2xy^7 + x^2 7y^6 \frac{dy}{dx} - \left(3x^2 y^2 + x^3 2y \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$(7x^2 y^6 - 2x^3 y) \frac{dy}{dx} = 3x^2 y^2 - 2xy^7$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(7y^5 - 2x)}{y(3x - 2y^5)}$$

ÖRNEK:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ise} ;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{bulundu} ,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{y} \right) \\ &= -\frac{(1)y - xy'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2} \\ &= -\frac{y - x \left(-\frac{x}{y} \right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \end{aligned}$$

$$y'' = -\frac{1}{y^3} \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} (-y^{-3}) = 3y^{-4} \frac{dy}{dx} \\ &= 3y^{-4} \left(-\frac{x}{y} \right) = -\frac{3x}{y^5} \end{aligned}$$

$$y''' = -\frac{3x}{y^5}$$

ÖRNEK:

$$\sin y = x \quad \text{ise} ;$$

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{dx}{dx}$$

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sec y$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \sec y$$

$$= \sec y \cdot \tan y \frac{dy}{dx}$$

$$= \sec y \cdot \tan y \cdot \sec y$$

$$= \sec^2 y \cdot \tan y$$

$$y''' = \sec^2 y (3 \sec^2 y - 2)$$

$$\left(f^{-1} \right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$f(x) = \arcsin x \quad \text{ise} \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x \quad \text{ise} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot} x \quad \text{ise} \quad f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = a^x \quad \text{ise} \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$f(x) = e^x \quad \text{ise} \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \log_a x \quad \text{ise} \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x) = \ln x \quad \text{ise} \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

FONKSİYONLAR

✚ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bu aralıkta sürekli, (a, b) aralığında türevli olsun. Bu fonksiyon $x_0 \in (a, b)$ noktasında **extremum** değerini alıyorsa, bu nokta için **türevi sıfırdır**.

ÖRNEK:

$f(x) = 3 + 4x - 3x^3$
fonksiyonunu $[-1, 2]$ aralığında inceleyiniz?

$$f'(x) = 4 - 9x^2$$

$$f'(x) = 4 - 9x^2 = 0$$

$$9x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3}$$

$$f(-1) = 2$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{9} \quad \text{Yersel minimum.}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{43}{9} \quad \text{Yersel (Mutlak) maksimum.}$$

$$f(2) = -13 \quad \text{Mutlak minimum.}$$

✚ $[a, b]$ de sürekli, (a, b) de türevli f fonksiyonu için;
 $f(a) = f(b)$ ise $f'(c) = 0$ olacak şekilde $\exists c \in (a, b)$ vardır.

✚ $[a, b]$ de sürekli, (a, b) de türevli f fonksiyonu için;

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{olacak şekilde}$$

$\exists c \in (a, b)$ vardır.

✚ $[a, b]$ de sürekli, (a, b) de türevli f fonksiyonu için;

$\forall x \in (a, b)$ de $f'(x) = 0$ oluyorsa, fonksiyon $[a, b]$ de sabit değerler alır.

✚ f ve g , $[a, b]$ de sürekli, (a, b) de türevli fonksiyonlar olsun.

$\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) = g'(x)$ ise

$\forall x \in (a, b)$ için $f(x) = g(x) + C$ dir.

ÖRNEK:

$$f(x) = x$$

fonksiyonunu inceleyiniz?

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 < x_2$ için ;

$f(x_1) = x_1 < x_2 = f(x_2)$ olduğundan fonksiyon artan.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^2$$

fonksiyonunu $(-\infty, 0)$ ve $(0, +\infty)$ aralıklarında inceleyiniz?

$(0, +\infty)$ aralığında $0 < x_1 < x_2$ olsun.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^2 - x_1^2 \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$f(x_1) < f(x_2)$ olup fonksiyon bu aralıkta artandır.

$(-\infty, 0)$ aralığında $x_1 < x_2 < 0$ olsun.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^2 - x_1^2 \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ &< 0 \end{aligned}$$

$f(x_2) < f(x_1)$ olup fonksiyon bu aralıkta azalandır.

✚ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bu aralıkta sürekli, (a, b) aralığında türevli olsun. $\forall x \in (a, b)$ de $f'(x) > 0$ oluyorsa, fonksiyon bu aralıkta **artandır**.

✚ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bu aralıkta sürekli, (a, b) aralığında türevli olsun. $\forall x \in (a, b)$ de $f'(x) < 0$ oluyorsa, fonksiyon bu aralıkta **azalandır**.

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$$

fonksiyonunu inceleyiniz?

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 16x \\ &= 4x(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

$(-\infty, -2)$ için $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ azalan.

$(-2, 0)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

$(0, 2)$ için $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ azalan.

$(2, +\infty)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^3(x-2)^4$$

fonksiyonunu inceleyiniz.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3(x-2)^4 + x^3(4)(x-2)^3 \\ &= x^2(x-2)^3(7x-6) \end{aligned}$$

$(-\infty, 0)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

$(0, \frac{6}{7})$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

$(\frac{6}{7}, 2)$ için $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ azalan.

$(2, +\infty)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

✚ f fonksiyonunun kritik noktası $x=c$ olsun.

$$(f'(c) = 0)$$

c 'den küçük değerler için $f'(x) > 0$,

c 'den büyük değerler için $f'(x) < 0$ ise
 $x=c$ de fonksiyon **yerel maksimum** yapar.

c 'den küçük değerler için $f'(x) < 0$,

c 'den büyük değerler için $f'(x) > 0$ ise
 $x=c$ de fonksiyon **yerel minimum** yapar.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$$

fonksiyonunu inceleyiniz?

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 16x \\ &= 4x(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

$$f'(-2) = f'(0) = f'(2) = 0$$

$x=-2$, $x=0$, $x=2$ kritik noktalar.

$(-\infty, -2)$ için $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ azalan.

$x=-2$ yerel minimum

$(-2, 0)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

$x=0$ yerel maksimum

$(0, 2)$ için $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ azalan.

$x=2$ yerel minimum

$(2, +\infty)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^3(x-2)^4$$

fonksiyonunu inceleyiniz.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3(x-2)^4 + x^3(4)(x-2)^3 \\ &= x^2(x-2)^3(7x-6) \end{aligned}$$

$$f'(0) = f'(\frac{6}{7}) = f'(2) = 0$$

$x=0$, $x=\frac{6}{7}$, $x=2$ kritik noktalar.

$(-\infty, 0)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

$x=0$ büküm noktası

$(0, \frac{6}{7})$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

$x=\frac{6}{7}$ yerel maksimum.

$(\frac{6}{7}, 2)$ için $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ azalan.

$x=2$ yerel minimum.

$(2, +\infty)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ artan.

FONKSİYONLAR

İNTEGRAL

(a,b) tanım aralığında türevi alınabilir bir fonksiyon olan ve

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

koşulunu sağlayan bir $y = F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in x 'e göre **belirsiz integrali** veya **ilkel fonksiyonu** denir.

$$F(x) = \int f(x) dx$$

şeklinde gösterilir.

ÖRNEK:

$f(x) = 2x$ fonksiyonunun ilkelini bulunuz?

$F(x) = x^2$ alınırsa ;

$$F'(x) = 2x = f(x) \text{ olduğundan}$$

$F(x) = x^2$ fonksiyonu , $f(x) = 2x$ in bir ilkelidir.

Genel olarak $F(x) = x^2 + C$ şeklindeki tüm fonksiyonlar ilkel fonksiyon olarak alınabilir. (C , integral sabiti)

ÖRNEK:

$f(x) = x^3$ fonksiyonunun ilkelini bulunuz?

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C \text{ alınırsa ;}$$

$$F'(x) = x^3 = f(x) \text{ olduğundan}$$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ fonksiyonu $f(x) = x^3$ in ilkel fonksiyonudur.

ÖRNEK:

$f(x) = 16(4x+1)^3$ fonksiyonunun bir ilkelinin

$$F(x) = (4x+1)^4 \text{ olduğunu gösteriniz?}$$

$$F'(x) = f(x) \text{ olmalıdır.}$$

$$F'(x) = 4(4x+1)^3 (4)$$

$$= 16(4x+1)^3$$

$$= f(x)$$

olduğundan doğrudur.

ÖRNEK:

$f(t) = (t^2 + 1)^2$ fonksiyonunun ,

$g(t) = 4t(t^2 + 1)$ nin bir ilkeli olduğunu gösteriniz?

$$f'(t) = g(t) \text{ olmalıdır.}$$

$$f'(t) = 2(t^2 + 1)2t$$

$$= 4t(t^2 + 1)$$

$$= g(t)$$

olduğundan doğrudur.

ÖRNEK:

$H(s) = \cos 2s$ fonksiyonunun ,

$g(s) = 2\sin 2s$ nin bir ilkeli olmadığını gösteriniz?

$$H'(s) \neq g(s) \text{ olmalıdır.}$$

$$H'(s) = -\sin 2s(2)$$

$$= -2\sin 2s$$

$$\neq 2\sin 2s = g(s)$$

olduğundan $H(s)$, $g(s)$ nin bir ilkeli değildir.

✚ $F(x)$ ve $G(x)$, aynı $f(x)$ fonksiyonunun birer ilkeli iseler ;

$$F(x) = G(x) + C \text{ eşitliği vardır.}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = x^7 \text{ ilkeli ;}$$

$$F(x) = \frac{1}{8}x^8 + C \text{ dir.}$$

$$f(x) = 4x^5 \text{ ilkeli ;}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^6 + C \text{ dir.}$$

$$f(x) = 4x^5 + x^7 \text{ ilkeli ;}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{8}x^8 + C \text{ dir.}$$

$$f(x) = 3\cos x \text{ ilkeli ;}$$

$$F(x) = 3\sin x + C \text{ dir.}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$f(x) = 3\cos x + 4\sin x$
fonksiyonunun ilkeli ;
 $F(x) = 3\sin x - 4\cos x$ dir.

NOT: Yukarıdaki örneklerde ;
 $F'(x) = f(x)$ olduğunu görünüz.

ÖRNEK:

$h(t) = 4t^7 - 6t^2 + 10$
fonksiyonunun ilkeli ;
 $H(t) = \frac{1}{2}t^8 - 2t^3 + 10t + C$ dir.

ÖRNEK:

$$\int 3x^4 dx = \frac{3}{5}x^5 + C$$

$$\int (a.\cos z + bz)dz = a.\sin z + \frac{b}{2}z^2 + C$$

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int (x + \sin x)^{10} dx = (x + \sin x)^{10}$$

$$\frac{d}{ds} \int \tan^{12} s ds = \tan^{12} s$$

ÖRNEK:

$$\int s.\cos t ds = \frac{1}{2}s^2 \cos t + C$$

$$\int s.\cos t dt = s.\sin t + C$$

$$\int 0 dx = C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{Q}, r \neq -1)$$

ÖRNEK:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} + C$$

$$\int t^{20} dt = \frac{t^{21}}{21} + C$$

$$\int w^8 dw = \frac{w^9}{9} + C$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{dt}{t^5} = \int t^{-5} dt = \frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4t^4} + C$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{dw}{w^{23}} = \int w^{-23} dw = \frac{w^{-22}}{-22} + C = -\frac{1}{22w^{22}} + C$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \int u^{-\frac{2}{3}} du = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{u} + C$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{dz}{z^{24}\sqrt[4]{z^3}} = \int z^{-\frac{11}{4}} dz = \frac{z^{-\frac{7}{4}}}{-\frac{7}{4}} + C = -\frac{4}{7z^{\frac{7}{4}}\sqrt[4]{z^3}} + C$$

ÖRNEK:

$$\int (2x)^4 dx = \int 16x^4 dx = 16 \int x^4 dx = \frac{16}{5} x^5 + C$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{\sqrt{t}}{t^3} dt = \int t^{-\frac{5}{2}} dt = \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3t\sqrt{t}} + C$$

ÖRNEK:

$$\int \cos t dt = \sin t + C$$

ÖRNEK:

$$\int \csc^2 s ds = -\cot s + C$$

ÖRNEK:

$$\int (\sin^2 x^3 + \cos^2 x^3) dx = \int (1) dx = \int dx = x + C$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

ÖRNEK:

$$\int 4x^6 dx = 4 \int x^6 dx = 4 \frac{x^7}{7} + C = \frac{4}{7} x^7 + C$$

ÖRNEK:

$$\int 6t\sqrt{t} dt = 6 \int t^{\frac{3}{2}} dt = 6 \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{12}{5} t^2 \sqrt{t} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \int (3x^4 + 6x^2) dx &= \int 3x^4 dx + \int 6x^2 dx \\ &= 3 \int x^4 dx + 6 \int x^2 dx \\ &= \frac{3}{5} x^5 + 2x^3 + C \end{aligned}$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{2}{3}x^6 - 8x^{12} \right) dx &= \int \frac{2}{3}x^6 dx - \int 8x^{12} dx \\ &= \frac{2}{21}x^7 - \frac{8}{13}x^{13} + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int (8\sec^2 x - 6\sec x \cdot \tan x) dx &= \\ &= 8 \int \sec^2 x dx - 6 \int \sec x \cdot \tan x dx \\ &= 8 \tan x - 6 \sec x + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int (t^4 - 4t^3)^2 dt &= \\ &= \int (t^8 - 8t^7 + 16t^6) dt \\ &= \frac{1}{9}t^9 - t^8 + \frac{16}{7}t^7 + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int \left(w^3 - \frac{1}{w^2} \right)^2 dw &= \\ &= \int \left(w^6 - 2w + \frac{1}{w^4} \right) dw \\ &= \frac{1}{7}w^7 - w^2 - \frac{1}{3w^3} + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int (\sec x + \tan x)^2 dx &= \\ &= \int (\sec^2 x + 2\sec x \cdot \tan x + \tan^2 x) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 + \tan^2 x &= \sec^2 x \\ \tan^2 x &= \sec^2 x - 1\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}&= \int (2\sec^2 x + 2\sec x \cdot \tan x) dx \\ &= 2 \tan x + \sec x + C\end{aligned}$$

✚ $u = g(x)$ ve $du = g'(x)dx$ için ;

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

ÖRNEK:

$$\int (x+1)^{15} dx =$$

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$\begin{aligned}&= \int u^{15} du = \frac{1}{16}u^{16} + C \\ &= \frac{1}{16}(x+1)^{16} + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\int (2x+1)^{15} dx =$$

$$u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{aligned}&= \int u^{15} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{15} du = \frac{1}{2} \frac{1}{16} u^{16} + C \\ &= \frac{1}{32}(2x+1)^{16} + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\int (3x+1)^{20} dx =$$

$$u = 3x+1 \Rightarrow du = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}du$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3} \int u^{20} du = \frac{1}{3} \frac{1}{21} u^{21} + C \\ &= \frac{1}{63}(3x+1)^{21} + C\end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\int \cos 2x \cdot dx =$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$= \int \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \cos u \cdot du = \frac{1}{2} \sin u + C$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

ÖRNEK:

$$\int \sec^2 3x \cdot dx =$$

$$u = 3x \Rightarrow du = 3 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} du$$

$$= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int \sec^2 u \cdot du = \frac{1}{3} \tan u + C$$

$$= \frac{1}{3} \tan 3x + C$$

$$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

ÖRNEK:

$$\int (5x-3)^9 dx =$$

$$u = 5x-3 \Rightarrow du = 5 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{5} du$$

$$= \int u^9 \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int u^9 du = \frac{1}{5} \frac{u^{10}}{10} + C$$

$$= \frac{(5x-3)^{10}}{50} + C$$

ÖRNEK:

$$\int x(3x^2-5)^{\frac{3}{4}} dx =$$

$$u = 3x^2-5 \Rightarrow du = 6x \cdot dx \Rightarrow x \cdot dx = \frac{1}{6} du$$

$$= \frac{1}{6} \int u^{\frac{3}{4}} du = \frac{2}{21} u^{\frac{7}{4}} + C$$

$$= \frac{2}{21} (3x^2-5)^{\frac{7}{4}} + C$$

$$= \frac{2(3x^2-5)^{\frac{7}{4}} \sqrt[4]{(3x^2-5)^3}}{21} + C$$

ÖRNEK:

$$\int x^8 \sqrt[3]{6x^9+12} dx =$$

$$u = 6x^9+12 \Rightarrow du = 54x^8 \Rightarrow x^8 dx = \frac{1}{54} du$$

$$= \int u^{\frac{1}{3}} \frac{1}{54} du = \frac{1}{54} \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{72} u^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{u} + C$$

$$= \frac{(6x^9+12)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{6x^9+12}}{72} + C$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}} dx =$$

$$u = 4-3x^2 \Rightarrow du = -6x \cdot dx \Rightarrow x \cdot dx = -\frac{1}{6} du$$

$$= \int u^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{6} du \right) = -\frac{1}{6} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{u} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{4-3x^2}}{3} + C$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\int (3x^3 - 1)(3x^4 - 4x + 1)^{1,45} dx =$$

$$u = 3x^4 - 4x + 1 \Rightarrow du = (12x^3 - 4)dx$$

$$\Rightarrow du = 4(3x^3 - 1) \Rightarrow (3x^3 - 1)dx = \frac{1}{4} du$$

$$= \int u^{1,45} \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \frac{u^{2,45}}{2,45} + C = \frac{5}{49} u^{2,45} + C$$

$$= \frac{5}{49} (3x^4 - 4x + 1)^{2,45} + C$$

ÖRNEK:

$$\int \sin 5x dx =$$

$$u = 5x \Rightarrow du = 5 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{5} du$$

$$= \frac{1}{5} \int \sin u du = -\frac{1}{5} \cos u + C$$

$$= -\frac{1}{5} \cos 5x + C$$

ÖRNEK:

$$\int x \cdot \sec x^2 \tan x^2 dx =$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \sec u \cdot \tan u du = \frac{1}{2} \sec u + C$$

$$= \frac{1}{2} \sec x^2 + C$$

ÖRNEK:

$$\int \sec^2 4x dx =$$

$$u = 4x \Rightarrow du = 4 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4} du$$

$$= \frac{1}{4} \int \sec^2 u du = \frac{1}{4} \tan u + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan 4x + C$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 du$$

$$= 2 \int \sin u du = -2 \cos u + C$$

$$= -2 \cos \sqrt{x} + C$$

ÖRNEK:

$$\int x \cdot \sec x^2 \tan x^2 \sec^2(\sec x^2) dx =$$

$$u = \sec x^2 \Rightarrow du = \sec x^2 \tan x^2 2x dx$$

$$\Rightarrow x \cdot \sec x^2 \tan x^2 dx = \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \sec^2 u du = \frac{1}{2} \tan u + C$$

$$= \frac{1}{2} \tan(\sec x^2) + C$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\int \cos 2x \cdot dx =$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u \cdot du = \frac{1}{2} \sin u + C$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

ÖRNEK:

$$\int \sec^2 3x^2 \cdot x \cdot dx =$$

$$u = 3x^2 \Rightarrow du = 6x \cdot dx \Rightarrow x \cdot dx = \frac{1}{6} du$$

$$= \frac{1}{6} \int \sec^2 u \cdot du = \frac{1}{6} \tan u + C$$

$$= \frac{1}{6} \tan 3x^2 + C$$

ÖRNEK:

$$\int x(x+1)^{100} dx =$$

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$\Rightarrow x = u-1$$

$$= \int (u-1)u^{100} du = \int (u^{101} - u^{100}) du$$

$$= \frac{u^{102}}{102} - \frac{u^{101}}{101} + C$$

$$= \frac{(x+1)^{102}}{102} - \frac{(x+1)^{101}}{101} + C$$

ÖRNEK:

$$\int x^2 \sqrt{2x+1} \cdot dx =$$

$$u = 2x+1 \Rightarrow du = 2 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\Rightarrow x = \frac{u-1}{2}$$

$$= \int \frac{(u-1)^2 u^{\frac{1}{2}}}{4} \cdot \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{8} \int (u^2 - 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{8} \int (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + C$$

$$= \frac{u^3 \sqrt{u}}{28} - \frac{u^2 \sqrt{u}}{10} + \frac{u \sqrt{u}}{12} + C$$

$$= \frac{(2x+1)^3 \sqrt{2x+1}}{28} - \frac{(2x+1)^2 \sqrt{2x+1}}{10}$$

$$+ \frac{(2x+1) \sqrt{2x+1}}{12} + C$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\int \frac{x}{(3x-2)^4} dx =$$

$$u = 3x - 2 \Rightarrow du = 3.d x \Rightarrow dx = \frac{1}{3} du$$

$$\Rightarrow x = \frac{u+2}{3}$$

$$= \int \frac{1}{3}(u+2)u^{-4} \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{9} \int (u^{-3} + 2u^{-4}) du$$

$$= \frac{1}{9} \left(\frac{u^{-2}}{-2} + \frac{2u^{-3}}{-3} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{18(3x-2)^2} - \frac{2}{3(3x-2)^3} + C$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{6x+1}} dx =$$

$$u = 6x + 1 \Rightarrow du = 6.d x \Rightarrow dx = \frac{1}{6} du$$

$$\Rightarrow x = \frac{u-1}{6}$$

$$= \int \frac{(u-1)^2}{36} u^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{6} du$$

$$= \frac{1}{216} \int (u^2 - 2u + 1) u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{216} \int (u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}) du$$

$$= \frac{1}{216} \left(\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} \right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{u}}{108} \left(\frac{u^2}{5} - \frac{2u}{3} + 1 \right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{6x+1}}{108} \left(\frac{(6x+1)^2}{5} - \frac{2(6x+1)}{3} + 1 \right) + C$$

$$\int x^n (ax+b)^m dx. \quad (x \in \mathbb{N})$$

Şeklindeki integrallerde ;

$$u = ax + b \Rightarrow x = \frac{u-b}{a} \Rightarrow dx = \frac{1}{a} du$$

değişimi uygulanır.

ÖRNEK:

$$\int x \cdot \sin x^2 \cdot \cos(\cos x^2) \cdot \sin^3(\cos x^2) dx =$$

$$u = \sin(\cos x^2)$$

$$du = \cos(\cos x^2) (-\sin x^2) \cdot 2x dx$$

$$= -2x \cdot \sin x^2 \cdot \cos(\cos x^2) dx$$

değişimi uygulandığında ;

$$= -\frac{1}{2} \int u^3 du = -\frac{1}{8} u^4 + C$$

$$= -\frac{1}{8} \sin^4(\cos x^2) + C$$

ÖRNEK:

$$\int x^3 \sqrt[3]{x^4 + 3} dx =$$

$$u = x^4 + 3 \Rightarrow du = 4x^3 dx$$

değişimi uygulandığında ;

$$= \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{16} u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3(x^4 + 3)\sqrt[3]{x^4 + 3}}{16} + C$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int x^2(x^2+1)^2 dx &= \\&= \int x^2(x^4+2x^2+1)dx \\&= \int (x^6+2x^4+x^2)dx \\&= \frac{1}{7}x^7 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx &= \\u = \sqrt{x}+1 \Rightarrow du &= \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\değişimi uygulandığında ; \\&= 2 \int u \cdot du = u^2 + C \\&= (\sqrt{x}+1)^2 + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx &= \\u = \sqrt{x+1} \\&\Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u \cdot du \\değişimi uygulanırsa ; \\&= \int \frac{(u^2-1)^2}{u} \cdot 2u \cdot du = 2 \int (u^2-1)^2 du \\&= 2 \int (u^4 - 2u^2 + 1) du \\&= 2 \left(\frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + u \right) + C \\&= \frac{2}{15} \sqrt{x+1} (3x^2 - 4x + 8) + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int \frac{\csc^2 \frac{1}{x}}{x^2} dx &= \\u = \frac{1}{x} \Rightarrow du &= -\frac{1}{x^2} dx \\değişimi uygulanırsa ; \\&= -\int \csc^2 u \cdot du = \cot u + C \\&= \cot \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\int \frac{x \cdot \sin x^2}{\sqrt{\cos x^2}} dx &= \\u = \cos x^2 \Rightarrow du &= -\sin x^2 \cdot 2x \cdot dx \\değişimi uygulanırsa ; \\&= -\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -u^{\frac{1}{2}} + C \\&= -\sqrt{\cos x^2} + C\end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

BELİRLİ İNTEGRAL

$[a,b]$ aralığında tanımlı ve negatif olmayan f fonksiyonunun bu aralıkta x eksenine ile sınırladığı alan

$$A = \int_a^b f(x).dx \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = x^2$ eğrisinin $0 \leq x \leq 1$ aralığında x eksenine ile sınırladığı bölgenin alanı : $\int_0^1 f(x).dx$ dir.

ÖRNEK:

$f(x) = x^4 + x$ eğrisinin $[1,4]$ aralığında x eksenine ile sınırladığı bölgenin alanı : $\int_1^4 (x^4 + x).dx$ dir.

$b, h \in \mathbb{R}^+$ ve $f(x) = h$ için;
 $\int_0^b h.dx = bh$ dir.

ÖRNEK:

$f(x) = 4x$ eğrisinin $[0,5]$ aralığında x eksenine ile sınırladığı bölgenin alanı ;

Tabanı 5 br. , yüksekliği $f(5)=20$ br. olan bir üçgensel bölgedir.

$$A = \frac{20.5}{2} = 50 \text{ br}^2. \text{ dir.}$$

$$A = \int_0^5 4x.dx = 50$$

ÖRNEK:

$$\int_0^0 -4x.dx = -\int_0^0 4x.dx = -50$$

ÖRNEK:

$$\int_0^2 (3x+1).dx = ?$$

$f(0)=1$, $f(2)=7$ taban uzunlukları $2-0=2$ yüksekliği olan bir yamuk.

$$A = \frac{(7+1)2}{2} = 8 \text{ br}^2.$$

$$\int_0^2 (3x+1).dx = 8 \text{ dir.}$$

$$\int_a^b cf(x).dx = c \int_a^b f(x).dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$$

$c \in [a,b]$ için;

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$$

$\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise ;

$$\int_a^b f(x).dx \geq 0 \text{ dir.}$$

$\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \leq g(x)$ ise ;

$$\int_a^b f(x).dx \leq \int_a^b g(x).dx \text{ dir.}$$

FONKSİYONLAR

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{dir.}$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

TEMEL TEOREM:

f , $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a,b] \quad \text{ise ;}$$

F fonksiyonu (a,b) aralığında türevi alınabilir bir fonksiyon olup

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a,b) \quad \text{dir.}$$

f fonksiyonunun ilkeli (belirsiz integrali) F iken ;

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{dır.}$$

ÖRNEK:

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \int_0^4 x \sqrt{x} dx &= \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^4 \\ &= \frac{2}{5} (4^{\frac{5}{2}} - 0) = \frac{64}{5} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} (x^4 - 2x) dx &= \\ &= \left(\frac{x^5}{5} - x^2 \right) \Big|_{-2}^{-1} = \\ &= \left(\frac{(-1)^5}{5} - (-1)^2 \right) - \left(\frac{(-2)^5}{5} - (-2)^2 \right) \\ &= -\frac{6}{5} + \frac{52}{5} = \frac{46}{5} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^2 - 5x^5) dx &= \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^6}{6} \right) \Big|_{-2}^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{80}{3} \right) - \left(\frac{-8}{3} - \frac{80}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \int_2^3 (3x^3 + 2x^2) dx &= \\ &= \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_2^3 \\ &= \left(\frac{243}{4} + 18 \right) - \left(12 + \frac{16}{3} \right) \\ &= \frac{793}{12} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx &= \int_1^2 x^{-3} \\ &= \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}.dx =$$

$$u = x^2 + 3 \Rightarrow du = 2x.dx$$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2+3}.dx &= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}{3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{x^2+3}.dx &= \left. \frac{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}{3} \right|_0^1 \\ &= \frac{8}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\int_{-2}^0 \frac{x}{(x^2+1)^3}.dx =$$

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x.dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)^3}.dx &= \int (x^2+1)^{-3} x.dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^{-3} du = -\frac{1}{4u^2} + C \\ &= -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{x}{(x^2+1)^3}.dx &= \\ &= -\left. \frac{1}{4(x^2+1)^2} \right|_{-2}^0 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{100}\right) \\ &= \frac{6}{25} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.dx =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}.dx =$$

integrali için ;

$$u = x^2 + 3 \Rightarrow du = 2x.dx$$

değişimi yapıldığında

$$x=0 \Rightarrow u=3$$

$$x=1 \Rightarrow u=4 \text{ olacağından ;}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{x^2+3}.dx &= \frac{1}{2} \int_3^4 u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \left. \frac{u\sqrt{u}}{3} \right|_3^4 = \frac{8}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

işlemi de yapılabilir.

ÖRNEK:

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{(1-4x)^5}.dx =$$

$$u = 1 - 4x \Rightarrow du = -4.dx$$

değişimi yapıldığında

$$x = -2 \Rightarrow u = 9$$

$$x = 3 \Rightarrow u = -11 \text{ olacağından ;}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 \frac{1}{(1-4x)^5}.dx &= -\frac{1}{4} \int_9^{-11} u^{-5} du \\ &= \left. \frac{1}{16u^4} \right|_9^{-11} \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{11^4} - \frac{1}{9^4} \right) \end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

✚ $\forall x \in [-a, a]$ için $f(-x) = f(x)$ ise ;
 f fonksiyonu çift fonksiyon olup , grafiği
 y eksenine göre simetriktir.

$$\int_{-a}^0 f(x).dx = \int_0^a f(x).dx$$

$$\int_{-a}^a f(x).dx = 2 \int_0^a f(x).dx \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK:

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \int_0^2 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 - 1) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (x^4 - 2x^2 - 1) dx \\ &= 2 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) \\ &= -\frac{44}{15} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \cos x dx \\ &= 2 \sin x \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x^6 - x^3) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^6 dx - \int_{-1}^1 x^3 dx \\ &= 2 \int_0^1 x^6 dx - \int_{-1}^1 x^3 dx \\ &= \frac{2x^7}{7} \Big|_0^1 - \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{7} - \frac{1}{4} (1 - 1) \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

✚ $\forall x \in [-a, a]$ için $f(-x) = -f(x)$ ise;
 f fonksiyonu tek fonksiyon olup , grafiği
başlangıç noktasına göre simetriktir.

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^0 f(x).dx = - \int_0^a f(x).dx \\ & \int_{-a}^a f(x).dx = 0 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

ÖRNEK:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{x^8 + x^4 + x^2 + 1}} dx = 0$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x^6 - x^3) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^6 dx - \int_{-1}^1 x^3 dx \\ &= 2 \int_0^1 x^6 dx - 0 \\ &= \frac{2x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

✚ $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan f ve g fonksiyonlarının bu aralıkta sınırladıkları bölgenin alanı :

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|.dx \text{ dir.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ eğrilerinin $0 \leq x \leq 1$ aralığında sınırladıkları bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|.dx$$

$$A = \int_0^1 |x - x^2|.dx$$

$0 \leq x \leq 1$ için $x^2 \leq x$ olduğundan $|x - x^2| = x - x^2$ dir.

$$A = \int_0^1 |x - x^2|.dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2).dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ve $g(x) = x^2 + 1$ eğrilerinin

$[0, 2]$ aralığında sınırladıkları bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|.dx$$

$$A = \int_0^2 \left| \frac{1}{2}x + 1 - x^2 - 1 \right|.dx$$

$$= \int_0^2 \left| \frac{1}{2}x - x^2 \right|.dx$$

$$= \left| \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} \right| \Big|_0^2 = \left| 1 - \frac{8}{3} \right| = \frac{5}{3}$$

ÖRNEK:

$$y = x^2 - 2x - 3 \text{ ve } y = 3x - 7$$

eğrileri ile sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

Önce eğrilerin kesim noktaları aranır.

$$x^2 - 2x - 3 = 3x - 7$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4$$

noktalarında kesişirler.

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|.dx$$

$$A = \int_1^4 |x^2 - 5x + 4|.dx$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x \right| \Big|_1^4$$

$$= \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

ÖRNEK:

$y = 3x$, $y = 2x$ ve $x = 3$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$y = 3x$ ve $y = 2x$ doğruları

$$3x = 2x \quad 3x - 2x = 0 \quad x = 0 \text{ da kesişirler.}$$

$$A = \int_0^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

ÖRNEK:

$y = x^2$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileri ile

sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

Eğriler ; $x^2 = \sqrt{x}$

$$x^2 - \sqrt{x} = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \text{ de kesişirler.}$$

$$A = \int_0^1 |x^2 - \sqrt{x}|.dx$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} \right| \Big|_0^1 = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$y = 4 - x^2$ ve $y = 1 - 2x$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$4 - x^2 = 1 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0 \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

$$A = \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right|_{-1}^3$$

$$= \left| -\frac{32}{3} \right|$$

$$= \frac{32}{3}$$

ÖRNEK:

$f(x) = (x-2)^2 - 4$ ve $g(x) = x$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$(x-2)^2 - 4 = x$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

$$A = \int_0^5 (5x - x^2) dx$$

$$= \left| \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right|_0^5$$

$$= \frac{125}{6}$$

ÖRNEK:

$f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ eğrilerinin $0 \leq x \leq 2$ aralığında sınırladıkları bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx$$

NOT:

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{için} \quad x \geq x^2$$

$$1 \leq x \leq 2 \quad \text{için} \quad x^2 \geq x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}$$

$$= 1$$

ÖRNEK:

$f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ eğrilerinin $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ aralığında sınırladıkları bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2(\sqrt{2} - 1)$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$x = y^2$ ve $x = y^3 - 4y + 4$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$y^3 - 4y + 4 = y^2$$

$$y^3 - y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$(y-1)(y-2)(y+2) = 0$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2 \quad \text{ve} \quad y_3 = -2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (y^3 - y^2 - 4y + 4) dy + \\ &\quad \int_1^2 (-y^3 + y^2 + 4y - 4) dy \\ &= \frac{71}{6} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ eğrisinin $0 \leq x \leq 4$ aralığında x eksenine ile sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$$A = \int_0^4 \sqrt{1+\sqrt{x}} \cdot dx \quad \text{isteniyor.}$$

Bu integrali bulmak zor olduğundan, eğrinin y eksenine ile sınırladığı alanı bulup dikdörtgenin alanından çıkartacağız.

$$y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$$

$$y^2 = 1+\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = y^2 - 1$$

$$x = (y^2 - 1)^2$$

$$y = f(0) = 1 \quad y = f(4) = \sqrt{3}$$

$$A = 4\sqrt{3} - \int_1^{\sqrt{3}} (y^2 - 1)^2 dy$$

$$= \frac{8}{5} (1 + 2\sqrt{3})$$

ÖRNEK:

$y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$ eğrisinin $0 \leq x \leq 49$ aralığında x eksenine ile sınırladığı alan kaç birim karedir?

$$A = \int_0^{49} \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \quad \text{isteniyor.}$$

Bu integrali bulmak zor olacağından, eğrinin y eksenine ile sınırladığı alandan yararlanalım.

$$y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \Rightarrow y^3 = 1+\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = y^3 - 1 \Rightarrow x = (y^3 - 1)^2$$

$$y = f(0) = 1 \quad y = f(49) = 2$$

$$A = 2.49 - \int_1^2 (y^3 - 1)^2 dy$$

$$= \frac{1209}{14}$$

✚ $f(x)$ eğrisinin $a \leq x \leq b$ aralığında x eksenine etrafında döndürülmesinden oluşan dönel cismin hacmi ;

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK:

$f(x) = x^2$ eğrisinin $1 \leq x \leq 2$ aralığında x eksenine etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

$$V = \pi \int_1^2 (x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^2 x^4 dx$$

$$= \pi \frac{1}{5} x^5 \Big|_1^2$$

$$= \frac{31}{5} \pi$$

FONKSİYONLAR

GENEL TEKRAR

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow |\sqrt{x}| \geq 2$$

$$\begin{aligned} \text{T.K} &= \{x : |x| \geq 2\} \\ &= \{x : x \leq -\sqrt{2} \text{ veya } x \geq \sqrt{2}\} \\ &= (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ fonksiyonu için ;
 $f(\sqrt{x})$ ve tanım kümesini bulunuz?

$$f(\sqrt{x}) = \sqrt{(\sqrt{x})^2 - 2} = \sqrt{x - 2}$$

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$\text{T.K} = [2, +\infty)$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{3x - 2} = ?$$

$$= \frac{\sqrt{2^2 + 5}}{3 \cdot 2 - 2} = \frac{3}{4}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = ?$$

$$\frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ x^3 - 2 & x \geq 1 \end{cases} \text{ ise ;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 2) = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &\neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ olduğundan} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &\text{ YOK.} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{9x - 2} - 4}{x - 2} = ?$$

$$\frac{\sqrt{9 \cdot 2 - 2} - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{9x - 2} - 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{9x - 2} - 4}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{9x - 2} + 4}{\sqrt{9x - 2} + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{9x - 2} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9}{\sqrt{9x - 2} + 4} \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{2}{x} \text{ için } f'(x) = ?$$

$$f(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx} \tan 3x^2 = 6x \cdot \tan^2 3x^2$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sin(\cos x)]^3 &= ? \\ &= 3[\sin(\cos x)]^2 \cdot \cos(\cos x)(-\sin x) \\ &= -3\sin x \cdot \cos(\cos x) \cdot [\sin(\cos x)]^2\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(2x+1)^3(4x+5)^2] &= ? \\ &= 3(2x+1)^2(2) \cdot (4x+5)^2 + (2x+1)^3 \cdot 2(4x+5)(4) \\ &= 2(4x+5)(20x+19)(2x+1)^2\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$xy^2 + \sin y = 1 \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\begin{aligned}1 \cdot y^2 + x \cdot 2yy' + \cos y \cdot y' &= 0 \\ y'(2xy + \cos y) &= -y^2 \\ y' &= -\frac{y^2}{2xy + \cos y}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{3x+1} \quad \text{için} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = ? \\ y &= \sqrt{3x+1} = (3x+1)^{\frac{1}{2}} \\ y' &= \frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}(3) = \frac{3}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}} \\ y'' &= -\frac{3}{4}(3x+1)^{-\frac{3}{2}}(3) = -\frac{9}{4}(3x+1)^{-\frac{3}{2}} \\ y''' &= \frac{27}{8}(3x+1)^{-\frac{5}{2}}(3) = \frac{81}{8}(3x+1)^{-\frac{5}{2}} \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{81}{8(3x+1)^2\sqrt{3x+1}}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$x^3 + y^3 = 1 \quad \text{ise} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

$$\begin{aligned}3x^2 + 3y^2y' &= 0 \\ y' &= -\frac{x^2}{y^2} \\ y'' &= -\frac{2xy^2 - x^2 \cdot 2yy'}{y^4} \\ &= -\frac{2xy(y - xy')}{y^4} \\ &= -\frac{2x(y - x(-\frac{x^2}{y^2}))}{y^3} \\ &= -\frac{2x(y^3 + x^3)}{y^5} \\ &= -\frac{2x}{y^5} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{2x}{y^5}\end{aligned}$$

ÖRNEK:

$f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunun $[-2, 3]$ aralığındaki ekstremum değerlerini bulunuz?

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) \\ 3(x^2 - 1) &= 0 \Rightarrow x_1 = -1 \quad \text{ve} \quad x_2 = 1 \\ &\text{kritik noktalar.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(-2) &= -2 \quad \text{minimum} \\ f(-1) &= 2 \\ f(1) &= -2 \quad \text{yerel minimum} \\ f(3) &= 18 \quad \text{mutlak maksimum}\end{aligned}$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (3x^2 - 4x).dx &= ? \\ &= x^3 - 2x^2 \Big|_{-1}^2 \\ &= (2^3 - 2.2^2) - ((-1)^3 - 2(-1)^2) \\ &= (8 - 8) - (-1 - 2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 \sqrt{x}}.dx &= ? \\ &= \int \left(\frac{x^3}{x^2 \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x^2 \sqrt{x}} \right).dx \\ &= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} \right).dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^{-1} \\ &= \frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \int x(4x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}.dx &= ? \\ &= \int (4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} x.d x \\ u = 4x^2 + 1 &\Rightarrow du = 8x.d x \\ \text{değişimi uygulanırsa :} \\ &= \frac{1}{8} \int u^{\frac{3}{2}} du \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{1}{20} (4x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{(4x^2 + 1)^2 \sqrt{4x^2 + 1}}{20} + C \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x}(x^2 - 4)^2}{x^2 - 2x - 1} &= ? \\ &= \frac{\sqrt{3 \cdot 3}(3^2 - 4)^2}{3^2 - 2 \cdot 3 - 1} = \frac{75}{2} \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2} &= ? \\ \frac{2^2 - 4}{2 - 2} &= \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var.} \\ \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t - 2)(t + 2)}{t - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} (t + 2) = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{t^2}{t - 2} &= ? \\ \frac{2^2}{2^- - 2} &= \frac{4}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 5| & x \leq 2 \\ \frac{x - 2}{x - 2} & x > 2 \end{cases} \text{ ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x^2 - 5| = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

FONKSİYONLAR

ÖRNEK:

$$\int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx = 0 \quad \text{ve}$$

$$\int_0^1 (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = 18 \quad \text{ise}$$

$$\int_0^1 (f(x))^4 \cdot f'(x) dx = ?$$

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$$

değişimi uygulanırsa ;

$$\int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \int_a^b u \cdot du = \frac{u^2}{2} \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{2} [(f(1))^2 - (f(0))^2] = 0$$

$$f(1) = p \quad \text{ve} \quad f(2) = k \quad \text{dersek}$$

$$p^2 - k^2 = 0 \Rightarrow (p - k)(p + k) = 0$$

$$\int_0^1 (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = \int_a^b u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{3} [(f(1))^3 - (f(0))^3] = 18$$

$$p^3 - k^3 = 54 \Rightarrow (p - k)(p^2 + pk + k^2) = 54$$

$$\int_0^1 (f(x))^4 \cdot f'(x) dx = \int_a^b u^4 du = \frac{u^5}{5} \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{5} [(f(1))^5 - (f(0))^5] = ?$$

$$\frac{1}{5} (p^5 - k^5) = ?$$

$$(p - k)(p + k) = 0$$

$$\Rightarrow p - k = 0 \Rightarrow p = k \quad \text{veya}$$

$$p + k = 0 \Rightarrow p = -k \quad \text{olmalıdır.}$$

$$p = k \quad \text{olmaz.}$$

Çünkü $p^3 - k^3 = 54$ verilmiş.

Öyleyse $p = -k$ dır.

$$p^3 - k^3 = 54 \Rightarrow 2p^3 = 54 \Rightarrow p = 3$$

$$\frac{1}{5} (p^5 - k^5) = \frac{1}{5} (243 + 243) = \frac{486}{5}$$

ÖRNEK:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(3)=2$ ve $f(x+3)=f(3) \cdot f(x)$ ise $f(-3)$ değeri kaçtır?

$$x=0 \text{ için ; } f(0+3)=f(3) \cdot f(0)$$

$$f(3)=f(3) \cdot f(0) \Rightarrow f(0)=1$$

$$x=-3 \text{ için ; } f(-3+3)=f(3) \cdot f(-3)$$

$$f(0)=f(3) \cdot f(-3)$$

$$1 = 2 \cdot f(-3)$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}$$

ÖRNEK:

$\lfloor \log_2 1 \rfloor + \lfloor \log_2 2 \rfloor + \lfloor \log_2 3 \rfloor + \lfloor \log_2 4 \rfloor + \dots + \lfloor \log_2 66 \rfloor$ toplamının değeri kaçtır?

$$\log_2 1 = 0$$

$\log_2 2$ den $\log_2 4$ e kadar tam kısım 1,

$\log_2 4$ den $\log_2 8$ e kadar tam kısım 2,

$\log_2 8$ den $\log_2 16$ ya kadar tam kısım 3,

$\log_2 16$ dan $\log_2 32$ ye kadar tam kısım 4,

$\log_2 32$ den $\log_2 64$ e kadar tam kısım 5 ve

$\log_2 64$ den $\log_2 67$ ye kadar tam kısım 6

olduğundan toplam :

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 32 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 276 \quad \text{dır.}$$

ÖRNEK:

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x$$

denkleminin pozitif köklerini bulunuz?

$$\ln x^{(x^x)} = \ln (x^x)^x$$

$$(x^x) \ln x = x \cdot \ln (x^x)$$

$$(x^x) \ln x = x^2 \ln x$$

$$\ln x \cdot (x^x - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{veya}$$

$$x^x - x^2 = 0 \Rightarrow x^x = x^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\zeta = \{1, 2\}$$

FONKSİYONLAR

1. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{-x}}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (0,1] B) [-1,0) C) (-1,0)
D) $\mathbb{R} - \{-1,0\}$ E) \emptyset

2. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{-x}}$

fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta tersi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ B) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
C) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ D) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{1+x}}$
E) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{-x}}$ değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) $-\infty$ D) $+\infty$ E) yok

4. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{-x}}$ ise $f'(-\frac{1}{2}) = ?$

- A) -1 B) 0 C) 2 D) -2 E) 1

5. $x^2 + 2y^2 = 6$ eğrisinin

(2,1) noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $y = x - 1$ B) $y = -\frac{x}{2} + 2$ C) $y = -x + 3$
D) $y = -2x + 5$ E) $y = 2x - 5$

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin kx}{x} & , x < 0 \\ 2x - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

fonksiyonu sürekli ise k kaçtır?

- A) 1/2 B) 2 C) 1 D) -1 E) -2

7. $\cos xy = y^2$ ise $y' = ?$

- A) $\frac{y \sin xy}{2y - x \sin xy}$ B) $\frac{y \sin xy}{2y + x \sin xy}$
C) $\frac{1}{x \sin xy}$ D) $\frac{y \sin xy}{2y}$ E) $\frac{y}{2y - x \sin xy}$

8. $y = 4^x$ ve $y = 2^x$ eğrilerinin hangi noktalarındaki teğetleri paraleldir?

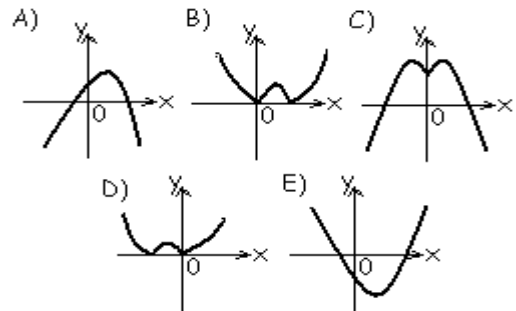
- A) $x=1$ B) $x=-1$ C) $x=\ln 2$ D) 2 E) 0

9. $f(x) = (\ln x)^{e^x}$ ise $f'(e) = ?$

- A) 1 B) e^{e+1} C) e^e D) e^{e-1} E) e

10. $y = |2 - (x-1)^2|$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



FONKSİYONLAR

11. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^5}$ değeri nedir?

- A) 0 B) $+\infty$ C) $-\infty$ D) 1 E) yok

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5}$ değeri nedir?

- A) 0 B) $+\infty$ C) $-\infty$ D) 1 E) yok

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot 3x \sin 4x}{\sin 3x}$ değeri nedir?

- A) 3/4 B) 4/9 C) 1/4 D) 4 E) yok

14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3(x+1)^2}$ değeri nedir?

- A) $+\infty$ B) 2/3 C) 0 D) 1/3 E) yok

15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ değeri nedir?

- A) 3 B) 1/3 C) 0 D) 1 E) yok

16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2}$ değeri nedir?

- A) 1 B) 3/4 C) 4/3 D) 3/5 E) yok

17 , 18 , 19 ve 20. sorular için :

$f(1)=2$, $f(2)=1$, $f'(1)=1$ ve $f'(2)=2$ dir.

17. $a(x) = f(2^x)$ ise $a'(1) = ?$

- A) $2 \ln 2$ B) $(\ln 2)^2$ C) 4 D) $4 \ln 4$ E) 2

18. $b(x) = (f \circ f)(2x)$ ise $b'(1) = ?$

- A) 4 B) 2 C) 1 D) 8 E) 6

19. $c(x) = (f(x))^x$ ise $c'(1) = ?$

- A) 2 B) $2(\ln 2 + 1)$ C) 4 D) $2 \ln 2 + 1$ E) 8

20. $d(x) = \frac{f(x^2)}{x}$ ise $d'(1) = ?$

- A) -1 B) 0 C) 2 D) -2 E) 1

21. $\log_2(\log_3(\log_5(\log_7 N))) = 11$ eşitliğinde N sayısının kaç farklı asal çarpanı vardır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

YANITLAR.

1.B 2.B 3.D 4.C 5.C 6.D 7.B 8.B 9.D
10.B 11.C 12.E 13.B 14.B 15.A 16.B
17.D 18.A 19.D 20.B 21.A

FONKSİYONLAR

1. $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & ; x \neq 1 \\ 1 & ; x=1 \end{cases}$ için;

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{x} = ?$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} = ?$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = ?$

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & ; x \leq 3 \\ \frac{12-2x}{3} & ; x > 3 \end{cases}$ için;

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$

6. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-10}$

fonksiyonu x 'in hangi değerleri için sürekli değildir?

7. $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x \leq -1 \\ ax+b & ; -1 < x < 3 \\ -2 & ; x \geq 3 \end{cases}$

fonksiyonu $\forall x \in R$ için sürekli ise $a+b=?$

8. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2}{x^2-x-2} = ?$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = ?$

10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = ?$

11. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = ?$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = ?$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4+5x-2}{2x^4-6x^3+7} = ?$

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 200x^2) = ?$

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x}{x+1} = ?$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = ?$

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x = ?$

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = ?$

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{x} = ?$

20. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = ?$

21. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4-x^2} = ?$

22. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{4-x^2} = ?$

23. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{4-x^2} = ?$

24. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2-4} = ?$

$f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \leq 3 \\ 3x-2 & ; 3 < x \end{cases}$

fonksiyonu için;

25. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$

26. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = ?$

YANITLAR:

1.3 2.-2 3.3 4.1/2√2 5.YOK 6.-2 ve 5
7.0 8.+∞ 9.+∞ 10.+∞ 11.-∞
12.YOK 13.3/2 14.-∞ 15.100 16.0
17.YOK 18.YOK 19.1 20.0 21.0 22.√3
23.TANIMLI DEĞİL 24.0 25.YOK 26.10

FONKSİYONLAR

1. $f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = ?$

2. $f(x)=x^2+1$ eğrisinin (2,5) noktasındaki teğetinin denklemini yazınız?

3. $f(x) = 4\sqrt{x} + 3\cos x \Rightarrow f'(x) = ?$

4. $f(x) = x + e^x$ eğrisinin (0,1) noktasındaki teğetinin denklemini yazınız?

5. $f(x) = \frac{2}{x}$ eğrisinin (5,0) noktasından geçen teğetinin denklemini yazınız?

6. $y = \frac{2e^x}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = ?$

7. $f(x) = e^x \cdot \sin x \Rightarrow f''(x) = ?$

8. $f(x) = (9 - x^2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = ?$

9. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) \Rightarrow f'(x) = ?$

10. $f(x) = x(1 + \sin^2 x)^3 \Rightarrow f'(x) = ?$

11. $x^3 + y^3 = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{dx}$ in (1,1) için değeri nedir?

12. $x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

13. $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$

14. $f(x) = \arctan \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = ?$

15. $f(x) = kx + \sin x$ fonksiyonunun tersinin olması için k ne olmalıdır?

16. $g(x) = x^2(x^2 - 4)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz?

17. $f(x) = x^3 - 12x$ fonksiyonunun [0,4] aralığındaki ekstremum noktalarını bulunuz?

18. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz?

19. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ fonksiyonunun $(0, 2\pi)$ aralığında değişimini inceleyiniz?

20. $y = x - \ln x$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz?

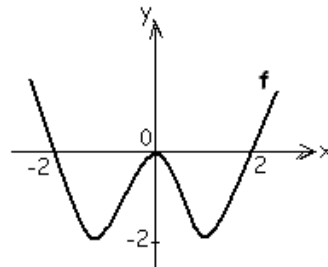
21. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz?

22. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ grafiğinin asimptotlarını bulunuz?

23. Çarpımları 192 olan pozitif iki sayının toplamalarının en küçük değeri kaçtır?

24. Bir eşkenar üçgen ile bir karenin çevrelerinin toplamı 10 birimdir. Bu düzlemsel bölgelerin alanları toplamı en az kaç birimkaredir?

25.



Grafiği verilen f fonksiyonunun türev fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

FONKSİYONLAR

ÇÖZÜMLER:

1. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{0(x-1) - 1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

2. $f(x) = x^2 + 1$ eğrisinin (2,5) noktasındaki teğetin denklemini yazınız?

$f'(x) = 2x$, $m_t = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$
 $y - 5 = 4(x - 2)$, $4x - y - 3 = 0$

3. $f(x) = 4\sqrt{x} + 3\cos x$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sin x$

4. $f(x) = x + e^x$ eğrisinin (0,1) noktasındaki teğetin denklemini yazınız?

$f'(x) = 1 + e^x$, $m_t = f'(0) = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$
 $y - 1 = 2(x - 0)$, $2x - y + 1 = 0$

5. $f(x) = \frac{2}{x}$ eğrisinin (5,0) noktasından geçen teğetin denklemini yazınız?

$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$, $m_t = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

$y - \frac{2}{a} = -\frac{2}{a^2}(x - a)$

$\frac{2}{a^2}x + y - \frac{4}{a} = 0$

(5,0) noktasından geçiyorsa ;

$\frac{2}{a^2} \cdot 5 + 0 - \frac{4}{a} = 0$, $10 - 4a = 0$, $a = \frac{5}{2}$

$\frac{8}{25}x + y - \frac{8}{5} = 0$, $8x + 25y - 40 = 0$

6. $y = \frac{2e^x}{x^2 + 1}$
 $\Rightarrow y' = \frac{2e^x(x^2 + 1) - 2x \cdot 2e^x}{(x^2 + 1)^2}$

7. $f(x) = e^x \cdot \sin x$
 $f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$
 $f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$
 $= 2e^x \cos x$

8. $f(x) = (9 - x^2)^{\frac{2}{3}}$
 $f'(x) = \frac{2}{3}(9 - x^2)^{-\frac{1}{3}}(-2x) = -\frac{4x}{3\sqrt[3]{9 - x^2}}$

9. $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$
 $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{x(x^2 + 1)}$

10. $f(x) = x(1 + \sin^2 x)^3$
 $f'(x) = 1(1 + \sin^2 x)^3 + x \cdot 3(1 + \sin^2 x)^2(2\sin x \cdot \cos x)$
 $= (1 + \sin^2 x)^2(1 + \sin^2 x + 3x \cdot \sin 2x)$

11. $x^3 + y^3 = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{dx}$ in (1,1) için değeri nedir?

$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 2y + 2x \frac{dy}{dx}$

$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 \frac{dy}{dx} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = -1$

12. $x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1 \cdot y - x \cdot \frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{y - x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3}$
 $= -\frac{16}{y^3}$

FONKSİYONLAR

13. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$

$$\ln y = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} \cdot x - 1 \cdot \ln(1+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)$$

14. $f(x) = \arctan \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

15. $f(x) = kx + \sin x$ fonksiyonunun

tersinin olması için k ne olmalıdır?

$f(x)$ 'in tersinin olabilmesi için ;

bire-bir ve örten olmalıdır.

bire-bir olması için ;

daima azalan veya daima artan olması gerekir.

Bunun içinde türevi x 'in tüm değerleri için daima negatif veya daima pozitif olmalıdır.

$$f'(x) = k + \cos x$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ olduğundan}$$

$$k \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

$$k \leq -1 \Rightarrow f' \leq 0 \text{ dır. } |k| \geq 1 \text{ olmalıdır.}$$

$f(x) = kx + \sin x$ fonksiyonu tanımlı olduğu değerler için örtendir.

16. $g(x) = x^2(x^2-4)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz?

$$g'(x) = 2x(x^2-4) + x^2(2x) = 4x^3 - 8x$$

Türevi sıfır yapan değerler kritik noktalardır.

$$g'(x) = 4x^3 - 8x = 0, \quad 4x(x^2-2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}$$

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -4), \quad (-\sqrt{2}, -4)$$

noktaları kritik noktalardır.

17. $f(x) = x^3 - 12x$ fonksiyonunun $[0,4]$ aralığındaki ekstremum noktalarını bulunuz?

Yerel maksimum veya minimum noktalarında türevi sıfır olacağından ;

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0, \quad 3x(x-4) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4 \text{ kritik noktalardır.}$$

$$x < 0 \text{ için } f'(x) > 0$$

$$0 < x < 4 \text{ için } f'(x) < 0$$

$$4 < x \text{ için } f'(x) > 0 \text{ olduğundan}$$

$$x=0 \text{ yerel maksimum } (0,0)$$

$$x=4 \text{ yerel minimum noktasıdır. } (4,16)$$

UYARI: Bu noktalar aynı zamanda verilen aralık için mutlak maksimum ve minimum değerlerini verir.

18. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz?

$x=0$ için $y=2$, y eksenini kestiği nokta .

$(x-1)^2(x+2)=0$, $x_{1,2}=1$, $x_3=-2$ x eksenini kestiği noktalar. ($x=1$ de teğet)

$$f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = 3(x-1)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ ve } x_2 = -1 \text{ kritik noktalar.}$$

$$x < -1 \text{ için } f'(x) > 0 \quad \text{ARTAN}$$

$$x = -1 \text{ için } f'(-1) = 0, \quad f(-1) = 4 \text{ maksimum.}$$

$$-1 < x < 1 \text{ için } f'(x) < 0 \quad \text{AZALAN}$$

$$x = 1 \text{ için } f'(1) = 0, \quad f(1) = 0 \text{ minimum.}$$

$$1 < x \text{ için } f'(x) > 0 \quad \text{ARTAN}$$

$$f''(x) = 6x = 0 \quad x = 0$$

$$x < 0 \text{ için } f''(x) < 0 \quad \text{konkav.}$$

$$x = 0 \text{ için } f''(0) = 0 \quad \text{dönüm noktası.}$$

$$x > 0 \text{ için } f''(x) > 0 \quad \text{konveks.}$$

FONKSİYONLAR

19. $f(x)=\sin x \cdot \cos x$ fonksiyonunun $(0, 2\pi)$ aralığında değişimini inceleyiniz?

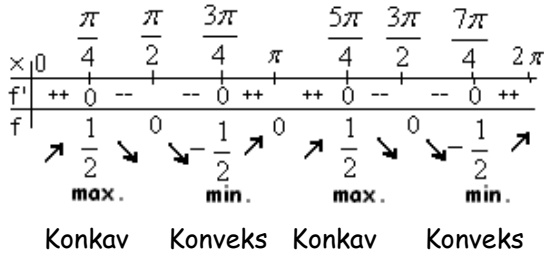
$$f(x)=\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\sin 2x=0 \quad 2x=\pi, 2\pi, 3\pi \quad x=\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

x eksenini kestiği noktalar.

$$f'(x)=\cos 2x=0 \quad 2x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \quad \text{kritik noktalar.}$$



$$f''(x)=-2\sin 2x=0$$

$$2x=\pi, 2\pi, 3\pi \quad , \quad x=\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

dönüm noktaları .

20. $y=x-\ln x$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz?

$$y'=1-\frac{1}{x}=0 \quad , \quad x=1 \quad \text{kritik nokta}$$

$$y''=\frac{1}{x^2}$$

$x < 1$ için $f'(1) < 0$ AZALAN

$f'(1)=0$ VE $f''(1) > 0$ yerel MINİMUM.

$x > 1$ için $f'(1) > 0$ ARTAN

21. $f(x)=2x^3-3x^2-12x$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz?

$$f'(x)=6x^2-6x-12=0$$

$$x^2-x-2=0 \quad , \quad (x+1)(x-2)=0 \quad , \quad x_1=-1, \quad x_2=2$$

$$f''(x)=12x-6=0 \quad , \quad x=1/2 \quad \text{Dönüm noktası}$$

$$f'(-1)=0 \quad , \quad f''(-1)=-18 < 0 \quad \text{Maksimum}$$

$$f'(2)=0 \quad , \quad f''(2)=18 > 0 \quad \text{Minimum}$$

22. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ grafiğinin

asimptotlarını bulunuz?

$$x^2-1=0 \quad , \quad (x-1)(x+1)=0 \quad , \quad x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$

Düşey asimptotlar.

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}$$

$y=x$ Eğik asimptot.

23. Çarpımları 192 olan pozitif iki sayının toplamalarının en küçük değeri kaçtır?

$$x \cdot y = 192 \quad , \quad y = \frac{192}{x}$$

$$T=x+y=x+\frac{192}{x} \quad T'=1-\frac{192}{x^2}=0$$

$$x=8\sqrt{3} \quad , \quad y=8\sqrt{3}$$

$$T=x+y=8\sqrt{3}+8\sqrt{3}=16\sqrt{3}$$

24. Bir eşkenar üçgen ile bir karenin çevrelerinin toplamı 10 birimdir. Bu düzlemsel bölgelerin alanları toplamı en az kaç birimkaredir?

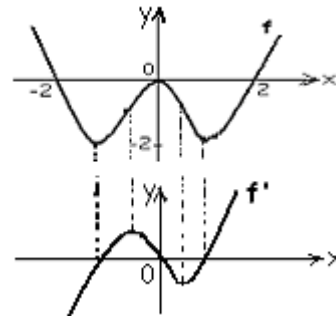
$$3a+4b=10 \quad , \quad b=\frac{10-3a}{4}$$

$$T=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{10-3a}{4}\right)^2$$

$$T'=\frac{a\sqrt{3}}{2}+2\left(\frac{10-3a}{4}\right)\left(\frac{-3}{4}\right)=0$$

$$a=\frac{90}{9+4\sqrt{3}} \quad \text{olmalıdır.}$$

25.



Grafiği verilen f fonksiyonunun türev fonksiyonunun grafiğini çiziniz.