

**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN – EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ**

İNTEGRAL

(Riemann İntegrali)

Hazırlayan
Ahmet Recep KARAKOÇ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Şaziye YÜKSEL

KONYA – 1996

ÖZET

Riemann integrali Fen Liseleri, Anadolu Liselerinin sayısal ve eşit ağırlık bölümlerinde gösterildiği gibi; fakültelerde Analiz-I ve Analiz-II derslerinde önemli bir konu olarak yerini her zaman korumaktadır.

Bu tez çalışması dört kısımdan oluşmaktadır.

Birinci bölümde belirsiz integral; ikinci bölümde belirli integral; üçüncü bölümde belirli integral ile düzlemsel alan hesapları, dönel cisimlerin hacim hesapları ve yüzey alanı hesaplarının nasıl hesaplanacağını anlatan teorik ve pratik kısımlar yazılmıştır. Dördüncü bölümde ise bir ucu sonsuza giden integral hesaplarından bahsedilmiştir.

Anahtar kelimeler: İntegral, Riemann, analiz, alan hesabı, yüzey alan hesabı, dönel cisimlerin hacmi, grafik, leminskat, astroid, kardiod, Bernoulli, Cauchy

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın tamamlanması için öğretim görevlisi Sayın Doç. Dr. Şaziye YÜKSEL'den ödünç almış olduğum kitaplar üzerinde incelemeler yaparak altı ayda hazırladım. Öğretmenimin görüş ve eleştirileriyle olgunlaştırmaya çalıştığım bu eser Analiz-I ve Analiz-II derslerine yardımcı kaynak olacağı düşüncesindeyim.

Hatta Riemann İntegralinin bazı kısımları da Fen Liseleri ve Anadolu Liselerinde anlatılan müfredat konuları ile örtüştüğünden, bu türdeki lise öğrencilerine de yarar sağlayacağı kanısındayım.

Bu tez yazımı ve hazırlık aşamasının her birinde bana yardım etmekten çekinmeyip, her zaman destek olan Sayın öğretmenim Doç. Dr. Şaziye YÜKSEL'e teşekkürlerimi arz ederim.

Ahmet Recep KARAKOÇ

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1.....	1
BELİRSİZ İNTEGRAL.....	1
1.1. TANIM:.....	1
1.2. BELİRSİZ İNTEGRALLERİN ÖZELLİKLERİ.....	2
1.3. TEMEL FORMÜLLER.....	3
1.4. İNTEGRAL ALMA METOTLARI.....	5
1.4.1. Değişken Değiştirme Metodu:	5
1.4.2. Kısımlı İntegrasyon Metodu	7
1.4.3. Rasyonel Fonksiyonların İntegrasyonu (veya Basit Kesirlere Ayırma)	9
1.4.3.1. $\int \frac{k}{ax+b} dx$ Hali:	9
1.4.3.2. $\int \frac{k}{(ax+b)^n} dx$ Hali:	10
1.4.3.3. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ Hali:	11
1.4.3.4. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ Hali:	12
1.4.4. Köklü İfadelerin İntegrasyonu	17
1.4.5. Binom İntegralleri	20
1.4.6. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ Şeklindeki İntegrallerin Hesabı	22
1.4.6.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integralinin hesabı:	22
1.4.6.2. $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ integralinin hesabı:	24
1.4.6.3. $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integralinin hesabı:	25
1.4.6.4. $P_n(x)$, n 'inci dereceden bir polinom olmak üzere, $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ şeklindeki integrallerin hesabı:	25
1.4.6.5 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\int \frac{dx}{(x-p)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ şeklindeki integrallerin hesabı:	26
1.4.7. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ Şeklindeki İntegrallerin Hesabı	27
1.4.8. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ Şeklindeki İntegrallerin Hesabı	29
1.4.9. İndirgeme (Rekürans) Formülleri.....	30
1.5. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER.....	32
1.6. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER.....	37

BÖLÜM 2.....	38
BELİRLİ İNTEGRAL.....	38
2.1. Aralıkların Parçalanması.....	38
2.1.1. Tanım:.....	38
2.2. Merdiven Fonksiyonları.....	39
2.2.1. Tanım:.....	39
2.3. Merdiven Fonksiyonlarının İntegrali.....	41
2.3.1. Tanım:.....	41
2.4. Kapalı Bir Aralıkta Tanımlı, Reel ve Sınırlı Bir Fonksiyonun Riemann İntegrali.....	42
2.4.1. Tanım:.....	43
2.4.2. Tanım:.....	43
2.4.3. Tanım:.....	43
2.4.4. Tanım:.....	44
2.5. Riemann Anlamında İntegrallenebilen Bazı Fonksiyon Sınıfları.....	45
2.5.1. Tanım:.....	46
2.6. $\int_a^x f(u) du$ 'nun Sürekliliği, İlkel Fonksiyonlar, Diferansiyel ve İntegral Hesabının Temel Teoremi.....	54
2.6.1. Belirsiz İntegral ile Belirli İntegral Arasındaki Bağntı. İlkel Fonksiyonlar:.....	55
2.6.2. Diferansiyel ve İntegral Hesabının Temel Teoremi:.....	55
2.7. Bazı Limitlerin İntegraller Yardımıyla Hesabı.....	57
2.8. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER.....	58
2.9. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER.....	65
BÖLÜM 3.....	68
BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI.....	68
3.1. Alan Hesapları.....	68
3.1.1. Dik Açılı Koordinat Sistemlerinde Alan Hesabı.....	68
3.1.2. Kutupsal Koordinat Sistemlerinde Alan Hesabı.....	73
3.1.3. Eğri Denkleminin Parametrik Olarak Verilmesi Halinde Alan Hesabı.....	75
3.1.4. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER.....	76
3.1.5. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER.....	85
3.2. Yay Uzunluğunun Hesabı.....	85
3.2.1. Kartezyen Koordinat Sisteminde Yay Uzunluğunun Hesabı.....	85
3.2.2. Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğunun Hesabı.....	87
3.2.3. Eğri Denkleminin Parametrik Olarak Verilmesi Halinde Yay Uzunluğunun Hesabı.....	90
3.2.4. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER.....	91
3.2.5. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER.....	93
3.3. Kiriş Uzunluğunun Eğri Parçasına Oranı.....	94
3.4. Hacim Hesapları.....	95
3.4.1. Kesit Metodu.....	95
3.4.1.a. Disk Metodu.....	98
3.4.1.b. Kabuk Metodu.....	101
3.4.2. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER.....	104
3.4.3. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER.....	113
3.5. Dönel Yüzeylerin Alanlarının Hesapları.....	115

3.5.1. Eğri Denkleminin Kartezyen Formda Verilmesi Halinde Dönel Yüzeyin Alanının Hesabı	115
3.5.2. Eğri Denkleminin Kutupsal Olarak Verilmesi Halinde Dönel Yüzeyin Alanının Hesabı	119
3.5.3. Eğri Denkleminin Parametrik Olarak Verilmesi Halinde Dönel Yüzeyin Alanının Hesabı	120
3.5.4. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER	121
3.5.5. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER	124
BÖLÜM 4.....	126
GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER.....	126
4.1. <i>İntegralleme Aralığının Sonsuz Olması Hali</i>	126
4.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 'in <i>İntegrali</i>	128
4.3. <i>Yakınsaklık Kriterleri. Mutlak Yakınsak İntegraller</i>	129
4.3.1. f 'nin Negatif Olmaması Halinde $\int_a^{\infty} f(x) dx$ İntegralinin Yakınsaklığı:	129
4.3.2. Seriler ile Olan Benzerlik:	130
4.3.3. Eğer $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integrali yakınsak ise, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integrali de yakınsaktır.	131
4.3.4. Mutlak Yakınsaklık:	131
4.3.5. Mukayese Kriteri:	131
4.4. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER	135
4.5. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER	139
4.6. <i>İntegralleme Aralığında Fonksiyonun Sonsuzluk Yerlerinin Bulunması Hali</i>	139
EK – 1.....	143
EK – 2.....	151
EK – 3.....	152
KAYNAKLAR	153

BÖLÜM 1

BELİRSİZ İNTEGRAL

Bir bakıma türev alma işlemlerinin tersi olan integral alma işlemi fen ve mühendisliğin en çok ihtiyaç duyduğu matematik konularının başında gelir. Biz bu bölümde temel fen derslerinde karşılaşılabilecek muhtemel olan bütün integral türleri için çözüm yollarını etraflı olarak ele alacağız.

Bu bölümde matematik ve fizik problemlerinin çözümünde önemli bir yer tutan integral kavramını tanıttık, daha sonra çeşitli integral alma yöntemlerini vermeye çalışacağız.

1.1. TANIM:

Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x) dx$ olan $F(x)$ ifadesine $f(x)$ 'in belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x)dx = F(x)$$

şeklinde gösterilir. Bu

$$F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

olması demektir. Diğer taraftan bir sabitin türevi sıfır olduğundan

$$\frac{d}{dx} [F(x) + c] = f(x)$$

yazılabilir ki, bu da $f(x)$ 'in integralinin $F(x)$ şeklinde yazılabileceğini gösterir.

Demek ki $\int f(x) dx$ integralini hesaplamak demek türevi $f(x)$ olan fonksiyonu bulmak demektir.

ÖRNEK 1.1.

$\int 2x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu integrali hesaplamak için türevi $2x$ olan ifadeyi bulmak gerekir. Bu ifadenin x^2 olduğunu türev kavramından dolayı söyleyebiliriz. Şu halde

$$\int 2x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

olur.

Şimdi belirsiz integrallere ait bazı özellikleri inceleyelim.

1.2. BELİRSİZ İNTEGRALLERİN ÖZELLİKLERİ

Özellik 1: $\forall p \in \mathbb{R}$ için

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

dir. Yani integral içindeki sabit çarpan integralin dışına alınabilir.

Özellik 2: Sonlu sayıda terimlerin toplamından oluşan bir ifadenin integrali, bu terimlerin ayrı ayrı integrallerinin toplamına eşittir. Yani $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\int [f_1(x) + f_1(x) + \dots + f_p(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_p(x) dx$$

dir. Özellik 1 ve Özellik 2 göz önüne alınırsa; $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int [a_1 f_1(x) + a_2 f_1(x) + \dots + a_p f_p(x)] dx = a_1 \int f_1(x) dx + a_2 \int f_2(x) dx + \dots + a_p \int f_p(x) dx$$

yazılabilir.

Bir integral alma işleminde, integrali alınacak ifadenin hangi fonksiyonun türevi olduğu görülebiliyorsa, bu fonksiyona bir c sabiti eklemek suretiyle integrali alınmış olur. Buna göre, türev konusunda gösterilen formüller yardımıyla aşağıdaki integral formüllerini yazabiliriz.

1.3. TEMEL FORMÜLLER

$$1) \int dx = x + c$$

$$2) \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$3) \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$$

$$4) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$5) \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c = a^x \log_a e + c$$

$$6) \int e^x \, dx = e^x + c$$

$$7) \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$8) \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$9) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arc} \sin x + c = -\operatorname{Arc} \cos x + c \quad (|x| < 1)$$

$$12) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc} \tan x + c = -\operatorname{Arc} \cot x + c$$

$$13) \int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

$$14) \int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

$$15) \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + c \quad (x \neq 0)$$

$$16) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arcc} \cosh x + c = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$$

$$17) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arcc} \cosh x + c = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c \quad (|x| > 1)$$

$$18) \int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{Arcth} x + c = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + c \quad (|x| > 1)$$

Şimdi bu formüllerden yararlanarak bazı integralleri hesaplayalım.

ÖRNEK 1.2.

$\int (9x^2 + 6x - 3) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\int (9x^2 + 6x - 3) dx &= 9 \int x^2 dx + 6 \int x dx - 3 \int dx \\ &= 9 \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} - 3x + c \\ &= 3x^3 + 3x^2 - 3x + c\end{aligned}$$

ÖRNEK 1.3.

$\int \left(3 \cos x - x^{3/2} + \frac{1}{2x} \right) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \left(3 \cos x - x^{3/2} + \frac{1}{2x} \right) dx = 3 \int \cos x dx - \int x^{3/2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} = 3 \sin x - \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{1}{2} \ln |x| + c$$

ÖRNEK 1.4.

$\int \left(2shx + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{x} \right) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \left(2shx + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{x} \right) dx = 2 \int shx dx + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int x^{1/2} dx = 2chx + 3 \operatorname{Arc} \sin x + \frac{2}{3} x^{3/2} + c$$

ALİŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$1) \int \left(2e^x + 3.5^x + \frac{2}{1+x^2} \right) dx$$

$$2) \int \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x}} dx$$

$$3) \int \left(\frac{2}{sh^2 x} - \frac{1}{ch^2 x} \right) dx$$

$$4) |x| < 1 \text{ olmak üzere } \int \left(2x + 3^x + \frac{1}{1-x^2} \right) dx$$

$$5) |x| < 1 \text{ olmak üzere } \int \left(\sin x + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{1-x^2} \right) dx$$

1.4. İNTEGRAL ALMA METOTLARI

Bazen integrali alınacak ifadenin (integrandın) hangi ifadenin türevi olduğunu görmek çok zordur. Bunun için bazı integrasyon metotları geliştirilmiştir. Şimdi bu metotlardan en kullanışlı olanları verelim.

1.4.1. Değişken Değiştirme Metodu:

$\int f(x) dx$ integralinde $x = \varphi(t)$ şeklinde bir değişken değiştirmesi yapıldığında, $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$ integrali elde ediliyor. Eğer bu integral alınabilirse, $t = \varphi^{-1}(x)$ konularak tekrar ilk değişken olan x 'e dönülür. Şimdi bu anlattıklarımızı örneklerle açıklayalım.

ÖRNEK 1.5.

$\int (x^3 - 2x)^5 (3x^2 - 2) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x^3 - 2x = t \quad \Rightarrow \quad (3x^2 - 2) dx = dt \text{ olup değerler yerine yazılırsa,}$$

$$\int (x^3 - 2x)^5 \cdot (3x^2 - 2) dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{(x^3 - 2x)^6}{6} + c$$

ÖRNEK 1.6.

$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\sin x = u \quad \Rightarrow \quad \cos x dx = du$$

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^u du = e^u + c = e^{\sin x} + c$$

ÖRNEK 1.7.

$\int \frac{(\text{Arcsin } x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\text{Arcsin } x = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$$

$$\int \frac{(\text{Arcsin } x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{(\text{Arcsin } x)^4}{4} + c$$

ALİŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

2) $\int e^{x^2-2x+1} \cdot (x-1) dx$

3) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

4) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

5) $\int \frac{\tan x}{(1 + \tan^2 x) \cdot \cos^2 x} dx$

1.4.2. Kısmî İntegrasyon Metodu

u ile v , x değişkeninin birer fonksiyonu olsun. Bir çarpının diferansiyelinden,

$$d(u.v) = du.v + dv.u \quad \Rightarrow \quad u.dv = d(u.v) - v.du$$

olduğunu biliyoruz.

$$u.dv = d(u.v) - v.du$$

eşitliğinin her iki tarafının integralini alırsak,

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

Bulunur. Eğer $\int v.du$ integralinin hesabı, $\int u.dv$ integralinin hesabından daha kolay ise, bu metot oldukça fayda sağlar. Demek ki bu metodu kullanmak için “ u ” ve “ dv ” diye öyle iki çarpıya ayırmalıdır ki, $\int v.du$ integrali $\int u.dv$ integralinden daha kolay olsun.

ÖRNEK 1.8.

$\int x \cdot \sin x \, dx = P$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} u = x \\ \sin x \, dx = dv \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\cos x \end{array}$$

$$P = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

bulunur.

ÖRNEK 1.9.

$\int \ln x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} u = \ln x \\ dx = dv \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{array}$$

olacağından

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - x + c$$

olur.

ÖRNEK 1.10.

$\int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} u = e^{ax} \\ \cos bx \, dx = dv \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = a \cdot e^{ax} dx \\ v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array}$$

olacağından,

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx = \frac{1}{b} \cdot e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx$$

Olur. Sağ taraftaki integrale aynı metot uygulanırsa,

$$\underbrace{\int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx}_I = \frac{1}{b} \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + \frac{a}{b^2} \cdot e^{ax} \cdot \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \underbrace{\int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx}_I$$

$$I + \frac{a^2}{b^2} I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} \right) I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

bulunur. Her iki tarafı $\frac{a^2 + b^2}{b^2}$ ile bölersek,

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx = \frac{(b \cdot \sin bx + a \cdot \cos bx)}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + c$$

elde edilir.

ALİŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1) $\int \text{Arc tan } x \, dx$

2) $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

$$3) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$4) \int x(x-1)^3 dx$$

$$5) \int \cos(\ln x) dx$$

$$6) \int x^2 \cdot e^{-3x} dx$$

1.4.3. Rasyonel Fonksiyonların İntegrasyonu (veya Basit Kesirlere Ayırma)

$P(x)$ ve $Q(x)$, x 'in polinomlarını gösterebilir. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden büyük ise,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

yazılabilir. Burada $K(x)$ bir polinomdur ve $R(x)$ 'in derecesi $Q(x)$ 'in derecesinden

küçüktür. Şu halde $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklinde bir rasyonel fonksiyonun integrallenebilmesi

payının derecesi paydasının derecesinden küçük olan $\frac{R(x)}{Q(x)}$ şeklinde bir rasyonel

fonksiyonun integrallenebilmesine indirgenir. Diğer taraftan $\frac{R(x)}{Q(x)}$ ifadesi

$b^2 - 4ac < 0$ ve $n > 1$ olmak üzere,

$$\frac{M}{px+q}, \quad \frac{N}{(px+q)^n}, \quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

şeklindeki bazı kesirlerin toplamından ibaret yazılabilir. O halde

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

şeklinde bir integral, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\int K(x) dx, \quad \int \frac{dx}{px+q}, \quad \int \frac{dx}{(px+q)^n}, \quad \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx, \quad \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx$$

şeklindeki integrallerin hesabına indirgenmiş olur.

$$1.4.3.1. \int \frac{k}{ax+b} dx \text{ Hali:}$$

Bu tür kesirlerde paydanın türevi pay kısmında varsa, “logaritmali” formülden yararlanılır.

ÖRNEK 1.11.

$\int \frac{7}{2x-5} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$2x-5=u \Rightarrow 2dx=du \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$$

$$\int \frac{7}{2x-5} dx = 7 \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{7}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{7}{2} \ln|u| + c = \frac{7}{2} \ln|2x-5| + c$$

ÖRNEK 1.12.

$\int \frac{x-1}{x^2-2x+7} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+7} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+7} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+7| + c$$

1.4.3.2. $\int \frac{k}{(ax+b)^n} dx$ Hali:

$u = ax + b$ dönüşümü ile çözülür.

ÖRNEK 1.13.

$\int \frac{3}{(4x-5)^6} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$4x-5=u \Rightarrow 4dx=du \Rightarrow dx=\frac{du}{4}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{(4x-5)^6} dx &= \frac{3}{4} \int \frac{du}{u^6} = \frac{3}{4} \int u^{-6} du = -\frac{3}{20} u^{-5} + c \\ &= -\frac{3}{20} \cdot \frac{1}{(4x-5)^5} + c\end{aligned}$$

1.4.3.3. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ Hali:

Rasyonel ifadedeki payın derecesi paydanın derecesinden büyük veya eşit ise, pay paydaya bölünür.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

şeklinde yazılır ve sonra ayrı ayrı integralleri alınır.

ÖRNEK 1.14.

$\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+3 \bigg| x^2+1 \\ \underline{-3x^2 \quad -3} \quad \quad \quad 3 \\ 2x \end{array}$$

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} dx = \int \left(3 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = 3x + \ln(x^2 + 1) + c$$

ÖRNEK 1.15.

$\int \frac{x^4 + 2x^2 + x}{x^3 + 1} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{array}{r} x^4+2x^2+x \bigg| x^3+1 \\ \underline{-x^4 \quad -x} \quad \quad \quad x \\ 2x^2 \end{array}$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 + x}{x^3 + 1} dx = \int \left(x + \frac{2x^2}{x^3 + 1} \right) dx = \int x dx + \frac{2}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \ln|x^3 + 1| + c$$

ÖRNEK 1.16.

$\int \frac{x}{x-2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{array}{r|l} x & x-2 \\ - & x-2 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$\int \frac{x}{x-2} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x-2} \right) dx = x + 2 \ln|x-2| + c$$

1.4.3.4. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ Hali:

(A) Eğer $ax^2 + bx + c$ polinomu çarpanlara ayrılıyorsa ifade basit kesirlerine ayrılarak integre edilir. Basit kesirlerine ayrılmıyorsa “Arc tan x” formülüne benzetilerek çözülür.

ÖRNEK 1.17.

$\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$3x-1 = (A+B)x + A-B$$

iki polinomun eşitliğinden A ve B’yi bulabiliriz. O halde

$$A+B=3$$

$$\frac{A-B=-1}{2A=2} \Rightarrow A=1, B=2$$

bulunur. Buradan

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right) dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x+1} dx = \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + c$$
$$= \ln|(x-1)(x+1)^2| + c$$

olur.

ÖRNEK 1.18.

$\int \frac{x+1}{x^3-1} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

eşitliğinden $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{2}{3}$, $C = -\frac{1}{3}$ bulunur. Buradan

$$\int \frac{x+1}{x^3-1} dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x^2+x+1| + c$$

bulunur.

(B) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ halinde ax^2+bx+c ifadesi çarpanlarına ayrılmıyorsa, yani

$b^2-4ac < 0$ ise

$$\int \frac{dt}{A^2+t^2} = \frac{1}{A} \text{Arc tan } \frac{t}{A} + c \quad \text{veya} \quad \int \frac{dt}{1+x^2} = \text{Arc tan } x + c$$

formülünden faydalanarak çözüm yapılır.

ÖRNEK 1.19.

$\int \frac{dx}{x^2+9}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{9 \left[1 + \left(\frac{x}{3} \right)^2 \right]} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \cdot \text{Arc tan } \frac{x}{3} + c = \frac{1}{3} \text{Arc tan } \frac{x}{3} + c$$

ÖRNEK 1.20.

$\int \frac{x \, dx}{x^4 + 5}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{x \, dx}{x^4 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{(x^2)^2 + (\sqrt{5})^2}$$

$$u = x^2 \Rightarrow 2x \, dx = du$$

$$\int \frac{x \, dx}{x^4 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \text{Arc tan } \frac{u}{\sqrt{5}} + c = \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{Arc tan } \frac{x^2}{\sqrt{5}} + c$$

ÖRNEK 1.21.

$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \\ &= 16 - 20 \\ &= -4 < 0 \end{aligned}$$

olduğundan $x^2 + 4x + 5$ polinomu çarpanlarına ayrılmaz. Bu yüzden bu ifadeyi tam kare ifadeye benzetirsek,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1^2} = \text{Arc tan}(x+2) + c$$

ÖRNEK 1.22.

$\int \frac{5x^2 + 3}{(2x+1)(x^2+4)} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{5x^2 + 3}{(2x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

olacak şekilde A, B, C sabitlerini bulalım. (Paydada ikinci dereceden bir ifade olduğu zaman, payın birinci dereceden genel bir ifade olduğuna dikkat ediniz). Paydalar eşitlenirse,

$$\begin{aligned} 5x^2 + 3 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)(2x + 1) \\ &= (A + 2B)x^2 + (B + 2C)x + (4A + C) \end{aligned}$$

$$A + 2B = 5$$

$$B + 2C = 0$$

$$4A + C = 3$$

bulunur. Bu sistemin çözümünden: $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$ bulunur. Bunlar yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 3}{(2x+1)(x^2+4)} dx &= \int \frac{1}{2x+1} dx + \int \frac{2x-1}{x^2+4} dx = \int \frac{dx}{2x+1} + \int \frac{2x}{x^2+4} dx - \int \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \frac{1}{2} \ln|2x+1| + \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \text{Arc tan } \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

elde edilir.

ÖRNEK 1.23.

$\int \frac{2x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x(x^2 + x + 1)^2} dx = I$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{2x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + x + 1)^2}$$

yazılır ve katsayılar hesaplanırsa, $A = B = D = 1$, $C = -3$, $E = -4$ bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x-3}{x^2+x+1} dx + \int \frac{x-4}{(x^2+x+1)^2} dx = \ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)-7}{x^2+x+1} dx + \int \frac{x-4}{(x^2+x+1)^2} dx \\
&= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)-9}{(x^2+x+1)^2} dx \\
&= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} dx - \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{7}{2} \int \frac{6xdx}{x^2+x+1} - \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{7}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc tan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3(2x+1)}{2(x^2+x+1)} - 2\sqrt{3} \operatorname{Arc tan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \\
&= \frac{1}{2} \ln|x^4+x^3+x^2| - \frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{13}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc tan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3(2x+1)}{2(x^2+x+1)} + c
\end{aligned}$$

ALİŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- 1) $\int \frac{dx}{x^2-5}$
- 2) $\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)}$
- 3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
- 4) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$
- 5) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$
- 6) $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$
- 7) $\int \frac{x dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$
- 8) $\int \frac{x+2}{x^2+x} dx$
- 9) $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$

$$10) \int \frac{2x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2 (x+2)} dx$$

1.4.4. Köklü İfadelerin İntegrasyonu

(a) Basit köklü integrallerde değiştirdiğimiz değişken köklü ifadeyi ortadan kaldıracak şekilde ayarlanır.

ÖRNEK 1.24.

$\int \sqrt{2x+4} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$t^2 = 2x + 4 \Rightarrow 2t dt = 2dx \Rightarrow dx = t dt$$

$$\int \sqrt{2x+4} dx = \int t \cdot t dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{1}{3} (\sqrt{2x+4})^3 + c$$

ÖRNEK 1.25.

$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+3}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x^2 + 3 = t^2 \Rightarrow 2x dx = 2t dt \Rightarrow x dx = t dt$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+3}} = \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t + c = \sqrt{x^2+3} + c$$

ÖRNEK 1.26.

$\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Kökün kuvvetleri 2 ve 3 olduğundan OKEK (2, 3) = 6 'dır. Dolayısıyla $t^6 = x-1$ dönüşümü yapılır.

$$t^6 = x - 1 \Rightarrow 6t^5 dt = dx$$

dir. Bu değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt[3]{x-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{t^6}+1}{\sqrt[3]{t^6}} 6t^5 dt = 6 \int (t^3+1)t^3 dt = 6 \int (t^6+t^3) dt \\ &= 6 \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^4}{4} \right) + c = \frac{6}{7}(x-1)^{7/6} + \frac{3}{2}(x-1)^{2/3} + c \end{aligned}$$

bulunur.

ALİŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$

2) $\int x\sqrt{x-1} dx$

3) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+7}} dx$

(b) Eğer integral operatörü altında aşağıdaki şekilde köklü ifadeler varsa karşılarındaki gibi trigonometrik dönüşümler yapılır. r sabit ve u değişken olmak üzere

i) $\sqrt{r^2 - u^2}$ için $u = r \cdot \sin t$

ii) $\sqrt{r^2 + u^2}$ için $u = r \cdot \tan t$

iii) $\sqrt{r^2 - u^2}$ için $u = r \cdot \sec t$

ÖRNEK 1.27.

$\int \sqrt{9-4x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \sqrt{9-4x^2} dx = \int \sqrt{3^2 - (2x)^2} dx$$

şeklinde yazarsak, $r = 3$ ve $u = 2x$ olduğu görülür. Burada $u = r \cdot \sin t$ dönüşümünü kullanacağız.

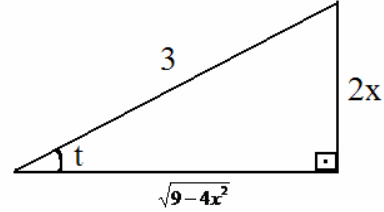
$$2x = 3 \sin t \Rightarrow 2 dx = 3 \cos t dt$$

dir. Bu değerler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9-4x^2} dx &= \int \sqrt{3^2-(2x)^2} dx = \int \sqrt{9-9\sin^2 t} \cdot \frac{3}{2} \cos t dt = \frac{3}{2} \int \sqrt{9(1-\sin^2 t)} \cdot \cos t dt \\ &= \frac{9}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{9}{2} \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{4} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c \end{aligned}$$

olur. Şimdi sonucu x değişkenine bağlı olarak yazmalıyız. Bunun için

$$2x = 3 \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{2x}{3}$$



$$\begin{aligned} \sin 2t &= 2 \sin t \cdot \cos t = 2 \cdot \frac{2x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3} \\ \sin 2t &= \frac{4x}{9} \sqrt{9-4x^2} \end{aligned} \Rightarrow t = \text{Arcsin} \frac{2x}{3}$$

olup buradan,

$$\int \sqrt{9-4x^2} dx = \frac{9}{4} \left(\text{Arcsin} \frac{2x}{3} + \frac{4}{18} \sqrt{9-4x^2} \right) + c$$

sonucunu elde ederiz.

ÖRNEK 1.28.

$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+9}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = 3 \tan t \Rightarrow dx = \frac{3 dt}{\cos^2 t}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{9} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$$

olur. Burada $\sin t = u \Rightarrow \cos t dt = du$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+9}} &= \frac{1}{9} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \frac{1}{9} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{9u} + c = -\frac{1}{9 \sin t} + c \\ &= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sin\left(\text{Arc tan } \frac{x}{3}\right)} + c = -\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x}\end{aligned}$$

bulunur.

1.4.5. Binom İntegralleri

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $p, q, r \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, $\int x^r (a + bx^p)^q dx$ şeklindeki integrallere “binom integralleri” denir.

A) $q \in \mathbb{Z}$ ise r ile p ’nin paydalarının en küçük ortak katı k olmak üzere, $x = t^k$ dönüşümü yardımıyla integral rasyonel bir fonksiyonun integraline dönüşür.

ÖRNEK 1.29.

$\int \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2} = \int x^{-1/2} (1 + x^{1/3})^{-2} dx$$

olduğundan $r = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{3}$, $q = -2$ dir. q bir tam sayı olduğundan $x = t^6$ dönüşümü yapmak gerekir. O halde

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2} &= 6 \int \frac{t^5 dt}{(1 + t^2)^2} = 6 \int \frac{(t^2 + 1) - 1}{(1 + t^2)^2} dt \\ &= 6 \int \frac{dt}{1 + t^2} - 6 \int \frac{dt}{(1 + t^2)^2} = 6 \text{Arc tan } t - 6 \int \frac{dt}{(1 + t^2)^2}\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi sağ taraftaki yeni integrali hesaplamalıyız. Kısmî integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \tan t + c\end{aligned}$$

dir. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa ve $t = x^{1/6}$ konursa

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2} = -\frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} + 3 \operatorname{Arc} \tan(\sqrt[6]{x}) + c$$

bulunur.

B) $\int x^r \cdot (a + bx^p)^q dx$ integralinde $x^p = y$ dönüşümü yapılırsa,

$\frac{1}{p} \int (a + by)^q \cdot y^{\left(\frac{r+1}{p}\right)} \cdot y^{-1} dy$ integrali elde edilir. $\frac{r+1}{p}$ tam sayı ise, q 'nun

paydası n olmak üzere, $a + by = t^n$ değişken değiştirmesini yapmak gerekir.

ÖRNEK 1.30.

$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Burada $r = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{4}$ olup, $\frac{r+1}{p} = 2 \in \mathbb{Z}$ 'dir.

$$1 + x^{1/4} = t^3 \Rightarrow x = (t^3 - 1)^4$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12 \int (t^6 - t^3) dt = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + c = \frac{12}{7} (1 + \sqrt[4]{x})^{7/3} - 3 (1 + \sqrt[4]{x})^{4/3} + c$$

C) $\int x^r \cdot (a + bx^p)^q dx$ integrali $\int \left(\frac{a+by}{y} \right)^q \cdot y^{\left(\frac{r+1}{p}+q-1\right)} dy$ şeklinde de yazılabilir.

$\frac{r+1}{p} \notin \mathbb{Z}$ fakat $\left(\frac{r+1}{p} + q \right) \in \mathbb{Z}$ ise $\frac{a+by}{y} = t^n$ dönüşümü ile integral rasyonel

fonksiyonun integraline dönüşür. Şu halde $\left(\frac{r+1}{p} + q\right) \in \mathbb{Z}$ ise $ax^{-p} + b = t^n$ dönüşümüyle rasyonel bir fonksiyonun integrali elde edilir.

ÖRNEK 1.31.

$\int \sqrt{\frac{x}{(1+\sqrt[3]{x})^{11}}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Verilen integral $\int x^{1/2} (1+x^{1/3})^{-11/2} dx$ şeklinde de yazılabileceğinden

$$r = \frac{1}{2}, \quad p = \frac{1}{3}, \quad q = -\frac{11}{2} \text{ dir.}$$

$$\frac{r+1}{p} + q = -1 \in \mathbb{Z}$$

olduğundan

$$x^{-1/3} + 1 = t$$

değişken değiştirmesi yapmak gerekir.

$$x = (t^2 - 1)^{-3} \Rightarrow dx = -6t(t^2 - 1)^{-4} dt$$

değerleri yerine konduğunda

$$\int x^{1/2} (1+x^{1/3})^{-11/2} dx = -6 \int t^{-10} dt = \frac{6}{9} t^{-9} + c = \frac{2}{3} \frac{1}{(x^{-1/3} + 1)^{9/2}} + c = \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} + c$$

bulunur.

1.4.6. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ Şeklindeki İntegrallerin Hesabı

1.4.6.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ integralinin hesabı:

Bu integralin hesaplanması a, b, c sayılarının değerine göre değişir.

a) $b^2 - 4ac < 0$ ve $a < 0$ ise kök içi $k^2 - u^2$ haline dönüştürülebilir.

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \text{Arcsin} \frac{u}{k} + c$$

formülüyle hesaplanır.

b) $b^2 - 4ac > 0$ ve $a > 0$ ise kök içi $u^2 - k^2$ haline dönüştürülebilir.

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - k^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - k^2}) + c$$

formülüyle hesaplanır.

c) $b^2 - 4ac < 0$ ve $a > 0$ ise kök içi $u^2 + k^2$ haline getirilir ve

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + k^2}) + c$$

dağıntısından yararlanılır.

d) $b^2 - 4ac = 0$ ve $a > 0$ ise kök içi $ax^2 + bx + c$ bir tam kare olup kök dışına çıkar.

ÖRNEK 1.32.

$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (+2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 \\ &= 4 + 12 \\ &= 16 > 0 \end{aligned} \quad \text{ve} \quad a = -1 < 0$$

olduğundan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-1)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} = \text{Arcsin} \frac{u}{2} + c = \text{Arcsin} \frac{x-1}{2} + c$$

bulunur.

ÖRNEK 1.33.

$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0 \quad \text{ve} \quad a = 2 > 0$$

olduğundan $u^2 - k^2$ haline getirebiliriz.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(x - \frac{3}{4} + \sqrt{\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16}} \right) + c$$

olur.

1.4.6.2. $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ integralinin hesabı:

$$\begin{aligned} \int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \frac{m}{2a} \int \frac{2ax + 2a \frac{n}{m}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \\ &= \frac{m}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(n - \frac{mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ &= \frac{m}{b} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(n - \frac{mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \end{aligned}$$

olur. 1.4.6.1. tipinde integraldir. Bunun nasıl hesaplanacağını biliyoruz.

ÖRNEK 1.34.

$\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 6}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2 \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + c \end{aligned}$$

1.4.6.3. $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ integralinin hesabı:

Bu integralde $\frac{1}{mx+n} = t$ dönüşümü yapılırsa, 1.4.6.2. tipinde bir integral elde edilir.

ÖRNEK 1.35.

$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{1}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{1-t}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t}$$

olacağından

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right| + c = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + c \end{aligned}$$

bulunur.

1.4.6.4. $P_n(x)$, n 'inci dereceden bir polinom olmak üzere, $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

şeklindeki integrallerin hesabı:

$Q_{n-1}(x)$, $n-1$ 'inci dereceden bilinmeyen katsayılı bir polinom ve λ bir sayı olmak üzere,

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın türevi alınır ve x^i 'lerin katsayıları eşitlenirse, $Q_{n-1}(x)$ 'in katsayıları ile λ sayısı bulunur. Böylece 1.4.6.1. tipindeki bir integralin hesaplanmasına dönüşür.

ÖRNEK 1.36.

$\int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{x^2 + 4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

eşitliğin her iki tarafının türevi alınır, paydalar eşitlenir ve x 'in kuvvetlerine göre sıralanırsa,

$$x^4 + 4x^2 = 4ax^4 + 3bx^3 + (2c + 12a)x^2 + (8b + d)x + (4c + \lambda)$$

elde edilir. Kat sayılar birbirine eşitlenirse,

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = 0, \quad \lambda = -2$$

bulunur. O halde

$$\int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \frac{x^3 + 2x}{4} \sqrt{x^2 + 4} - 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + c_1$$

olur.

1.4.6.5 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\int \frac{dx}{(x-p)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ şeklindeki integrallerin hesabı:

Bu integralde $\frac{1}{x-p} = t$ dönüşümü yapılırsa, 1.4.6.4. tipinde integral elde edilir.

ÖRNEK 1.37.

$\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2 + 2x}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\frac{1}{x+1} = t$ dönüşümü yapılırsa

$$x = \frac{1-t}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$$

olacağından,

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}} = -\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

bulunur. Bu 1.4.6.4. tipinde bir integraldir.

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} = (At+B)\sqrt{1-t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

her iki tarafın türevini alalım.

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = A\sqrt{1-t^2}(At+B) \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$t^2 = -2At^2 - Bt + A + \lambda \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

bulunur. O halde

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{2}t + \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } t + c$$

dir. Buna göre

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \text{Arcsin } \frac{1}{x+1} + c$$

olur.

1.4.7. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ Şeklindeki İntegrallerin Hesabı

Burada integral içindeki fonksiyonun x ile köklü ifadenin rasyonel bir fonksiyonu olduğunu belirtmek için, parantez dışına R harfi konulmuştur. Bu ifadeyi rasyonel hale getirmek için

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$$

koyalım.

$$(cx+d)t^m = ax+b \quad \text{veya} \quad cxt^m + dt^m = ax+b$$

$$x(a - ct^m) = dt^m - b \Rightarrow x = g(t) = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$$

dir. Böylece

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R[g(t), t] \cdot g'(t) dt$$

olur ve integral içindeki ifade t 'nin rasyonel bir ifadesidir. Şu halde şimdiye kadar ki yöntemlerle hesap edilebilir.

ÖRNEK 1.38.

$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow dx = 2t dt$ olur ve

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx &= 2 \int \frac{(t+2)t}{t^4 - t} dt = 2 \int \frac{t+2}{t^3 - 1} dt = \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1} \right) dt \\ &= 2 \log|t-1| - \log(t^2+t+1) - \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \log \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+2+\sqrt{x+1}} \right|^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc tan } \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK 1.39.

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}$$

yazılabilir. Şimdi

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

dersek,

$$x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1} \Rightarrow dx = \frac{-6t^2}{(t^3 - 1)^2} dt$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} &= -\int \frac{3dt}{t^3 - 1} = \int \left(\frac{t+2}{t^2 + t + 1} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t+1}{t^2 + t + 1} dt + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} - \int \frac{dt}{t-1} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{t^2 + t + 1}{(t-1)^2} + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \log \frac{t^2 + t + 1}{(t-1)^2} + \sqrt{3} \operatorname{Arc} \tan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c \\ &= \frac{1}{2} \log \left[\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)^2} \right] + \sqrt{3} \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{2\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot \sqrt{3}} \right) + c \end{aligned}$$

bulunur.

1.4.8. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ Şeklindeki İntegrallerin Hesabı

Bu tip integrallerin çözümü için $\tan \frac{x}{2} = t$ dönüşümü yapılır. Buna göre,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

olacağından karşımıza t 'nin bir rasyonel ifadesinin integrali çıkar.

ÖRNEK 1.40.

$\int \frac{\sin x \, dx}{1 + \cos x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Burada $\tan \frac{x}{2} = t$ dönüşümü yapacağız.

$$\int \frac{\sin x \, dx}{1 + \cos x} = \int \frac{2tdt}{1+t^2} = \ln(1+t^2) + c = \ln\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + c = -\ln\left(\cos^2 \frac{x}{2}\right) + c$$

ÖRNEK 1.41.

$\int \frac{1 + \sin x}{\cos x (1 + \cos x)} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\tan \frac{x}{2} = t$ dönüşümü yapacağız. O halde

$$\int \frac{1 + \sin x}{\cos x (1 + \cos x)} dx = \int \frac{1+t}{1-t} dt = \int \left(-1 + \frac{2}{1-t} \right) dt = -t + 2 \ln|1-t| + c = -\tan \frac{x}{2} + 2 \ln \left| 1 - \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

bulunur.

NOT: Trigonometrik ifadeler yukarıdaki örneklerde olduğu gibi toplam değil de çarpım halinde olurlarsa $\tan x = t$ dönüşümü yapılır. Buradan

$$\tan x = t \Rightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

olur. Bunun için bir örnek verelim.

ÖRNEK 1.42.

$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\tan x = t$ dönüşümü yapalım.

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} = \int \frac{1+t^2}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} + t \right) dt = \ln|t| + \frac{t^2}{2} + c = \ln|\tan x| + \frac{1}{2} \tan^2 x + c$$

1.4.9. İndirgeme (Rekürans) Formülleri

Kısmî integrasyon metodu yardımıyla, yüksek dereceden bazı ifadelerin integrali daha küçük dereceden bir ifadenin integraline dönüştürülebilir. Bu yolla yüksek dereceli ifadelerin integrali kolayca hesaplanabilir. Şimdi indirgeme formüllerinden bazılarını verelim.

$$1) \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$2) \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \quad (n > 1)$$

3) $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx = -\frac{1}{m+n} \sin^{n-1} x \cdot \cos^{m+1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^m x \, dx$$

$$4) \int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx \quad (n > 1)$$

$$5) \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2) \cdot a^2 \cdot (a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2) \cdot a^2} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}} \quad (n > 1)$$

6) $b^2 - 4ac < 0$ ve $n > 1$ için

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{2ax + b}{(n-1) \cdot (4ac - b^2) \cdot (ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{2a \cdot (2n-3)}{(n-1) \cdot (4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}}$$

7) $n \in \mathbb{N}$ ve $b^2 - 4ac < 0$ için

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} \, dx &= \frac{A}{2a \cdot (n-1) \cdot (ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{(2aB - Ab) \cdot (2ax + b)}{2a \cdot (n-1) \cdot (4ac - b^2) \cdot (ax^2 + bx + c)^{n-1}} \\ &+ \frac{2a \cdot (2n-3) \cdot (2ax + b)}{2a \cdot (n-1) \cdot (4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \end{aligned}$$

1.5. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{x + \frac{1}{x}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{x + \frac{1}{x}} dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{x + \frac{1}{x}} + c$$

2) $I = \int \frac{(ax^2 - b) dx}{x\sqrt{c^2x^2 - (ax^2 + b)}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $ax + \frac{b}{x} = t$ değişken değiştirilmesi yapılırsa,

$$I = \int \frac{(ax^2 - b) dx}{x\sqrt{c^2x^2 - (ax^2 + b)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}} = \text{Arc sin } \frac{t}{c} + c_1$$
$$I = \text{Arc sin} \left(\frac{ax + \frac{b}{x}}{c} \right) + c_1 = \text{Arc sin} \frac{ax^2 + bx}{cx} + c_1$$

elde edilir.

3) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $3x+1 = t^3 \Rightarrow dx = t^2 dt \Rightarrow x = \frac{t^3-1}{3}$ değişken değiştirilmesi yapalım.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx = \int \frac{\frac{t^3-1}{3} + 1}{t} t^2 dt = \int \frac{t^3-1+3}{3} \cdot t dt = \int \frac{(t^3+2)t}{3} dt = \frac{1}{3} \int (t^4 + 2t) dt$$
$$= \frac{1}{3} \left(\frac{t^5}{5} + t^2 \right) + c = \frac{1}{15} t^5 + \frac{1}{3} t^2 + c = \frac{1}{15} (3x+1)^{5/3} + \frac{1}{3} (3x+1)^{2/3} + c$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5 du$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} &= \int \frac{6u^5 du}{u^2 + u^3} = 6 \int \frac{u^3}{u+1} du = 6 \int \left(\frac{u^3+1}{u+1} - \frac{1}{u+1} \right) du = 6 \int (u^2 - u + 1) du - 6 \int \frac{du}{u+1} \\ &= 6 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u \right) - 6 \ln|u+1| + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c\end{aligned}$$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $1-x = t^2 \Rightarrow -dx = 2t dt$
 $x = 1-t^2 \Rightarrow dx = -2t dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2t dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -2 \operatorname{Arcsin} t + c = -2 \operatorname{Arcsin} \sqrt{1-x^2} + c$$

6) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$ dir. Burada $\tan x = t$ dönüşümünü yaparsak,

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

olur. Bunları yerine koyarsak,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} &= \int \frac{dx}{1 + 2 \sin x \cdot \cos x} = \int \frac{dt}{1+t^2+2t} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} \\ &= -\frac{1}{t+1} + c = -\frac{1}{\tan x + 1} + c = -\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + c\end{aligned}$$

bulunur.

7) $\int \cos(\ln x) dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \Rightarrow dx = e^t dt$

$$\begin{aligned}\int \cos(\ln x) dx &= \int \cos t \cdot e^t dt = \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) + c \\ &= \frac{1}{2} x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + c\end{aligned}$$

8) $\int \frac{\text{Arcsin} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$\begin{aligned}\int \frac{\text{Arcsin} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\text{Arcsin} t}{t} 2t dt = 2 \int \text{Arcsin} t dt = 2t \cdot \text{Arcsin} t + \cos(\text{Arcsin} t) + c \\ &= 2\sqrt{x} \text{Arcsin} \sqrt{x} + 2\cos(\text{Arcsin} \sqrt{x}) + c\end{aligned}$$

9) $\int \frac{\tan^2(\ln x)}{x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$

$$\int \frac{\tan^2(\ln x)}{x} dx = \int \tan^2 t dt = \int (1 + \tan^2 t) dt - \int dt = \tan t - t + c = \tan(\ln x) - \ln x + c$$

10) $\int (\ln x)^2 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bunun çözümü için kısmî integrasyon metodundan faydalanalım.

$$\left. \begin{aligned} u &= (\ln x)^2 \\ dv &= dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} du &= 2 \ln x \frac{dx}{x} \\ v &= x \end{aligned}$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x \cdot (\ln x)^2 - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot (\ln x)^2 - 2 \underbrace{\int \ln x dx}_I$$

son integralde yine kısmî integrasyon metodunu uygulayalım.

$$\left. \begin{aligned} u &= \ln x \\ dv &= dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} du &= \frac{dx}{x} \\ v &= x \end{aligned}$$

$$I = \int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x - 2x + c$$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bu integralin çözümü için ilk önce değişken değiştirilim.

$$x+1=t \Rightarrow dx=dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt[4]{t}} = \int (t^{1/2} + t^{1/4})^{-1} dt = \int t^{-1/4} (1 + t^{1/4})^{-1} dt$$

Bu integral bir binom integrali haline dönüşmüş oldu. (Bkz. sayfa 18) Burada

$$r = -\frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{4}, \quad q = -1 \in \mathbb{Z}$$

olduğundan

$$t = u^4$$

dönüşümünü kullanacağız.

$$t = u^4 \Rightarrow dt = 4u^3 du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}} &= \int t^{-1/4} (1 + t^{1/4})^{-1} dt = \int u^{-1} (1 + u)^{-1} 4u^3 du = 4 \int \frac{u^2}{1+u} du \\ &= 4 \int \frac{u^2-1}{1+u} du + 4 \int \frac{1}{1+u} du = 4 \int (u-1) du + 4 \int \frac{du}{1+u} \\ &= 4 \left[\frac{u^2}{2} - u + \ln|u+1| \right] + c = 4\sqrt{t} - 4\sqrt[4]{t} + 4 \ln(\sqrt[4]{t} + 1) + c \\ &= 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt[4]{x+1} + 4 \ln(\sqrt[4]{x+1} + 1) + c \end{aligned}$$

12) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + x - 1}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ tipinde bir integraldir. (Bkz. s:23)

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = -\frac{du}{u^2}$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 + x - 1}} = - \int \frac{du}{\sqrt{1+u-u^2}} = - \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2}} = - \text{Arc sin} \left(\frac{2u-1}{\sqrt{5}} \right) + c = - \text{Arc sin} \left(\frac{2-x}{x\sqrt{5}} \right) + c$$

13) $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = -\int \frac{(t^2+1)-2}{t^2+1} dt = -\int dt + 2 \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -t + 2 \operatorname{Arc} \tan t + c = -\tan \frac{x}{2} + x + c \end{aligned}$$

14) $\int \frac{dx}{2 + \sin x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \sin x} &= \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \tan \left[\frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right] + c \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \right) + c \end{aligned}$$

15) $I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Bunun çözülebilmesi için kısmî integrasyon metodundan yararlanacağız.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = u \\ e^{2x} \cdot \sin x \, dx = dv \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x \, dx = du \\ v = \frac{e^{2x}}{5} (2 \sin x - \cos x) \end{array}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{5} x^2 \cdot e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{2}{5} \underbrace{\int x \cdot e^{2x} \cdot \sin x \, dx}_K$$

K integralinin çözümünü de kısmî integrasyon yöntemiyle yaparsak

$$K = \int x \cdot e^{2x} \cdot \sin x \, dx = \frac{e^{2x}}{5} \left[2(\sin x - \cos x)x - \frac{2}{5}(3 \sin x - \cos x) \right]$$

olur. O halde sonuç

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x \, dx = \frac{e^{2x}}{5} \left[(2 \sin x - \cos x)x^2 - \frac{4}{5}(\sin x + \cos x) + \frac{4}{25}(3 \sin x - \cos x) \right]$$

dir.

1.6. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER

$$1) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = ?$$

$$7) \int \frac{dx}{1+\tan x} = ?$$

$$2) \int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(\ln x)} = ?$$

$$8) \int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 4} dx = ?$$

$$3) \int x \cdot \cos^2 x \, dx = ?$$

$$9) \int \frac{a^x dx}{a^{2x} + 1} = ?$$

$$4) \int \frac{\sin x \, dx}{a^2 + \cos^2 x} = ?$$

$$10) \int \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx = ?$$

$$5) \int \frac{dx}{(x+1)^2 \cdot (1+x^2)} = ?$$

$$11) \int \sin \sqrt{x} \, dx = ?$$

$$6) \int \frac{x^4+1}{x^3+x^2} dx = ?$$

$$12) \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = ?$$

BÖLÜM 2

BELİRLİ İNTEGRAL

Bu bölümde Riemann integralini anlatacağız ve bu integralin özelliklerinden bahsedeceğiz.

2.1. Aralıkların Parçalanması

İntegral teorisinin temel kavramlarından biri parçalama kavramıdır. Şimdi bu kavramı tanımlayalım.

2.1.1. Tanım:

$[a, b]$ aralığını $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ özelliğini sağlayan x_1, x_2, \dots, x_{n-1} noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim. Uygunluğu sağlamak için a sayısını x_0 , b sayısını x_n ile gösterelim.

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

cümlesine $[a, b]$ aralığının bir **parçalanması** veya **bölüntüsü** denir.

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ aralıklarına $[a, b]$ aralığının P parçalanmasına karşılık gelen “*kapalı alt aralıkları*”; $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ aralıklarına da “*açık alt aralıkları*” denir.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının **boyu** veya **ölçüsü** denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının **normu** veya **maksimal çapı** denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde

$$\|P\| = \max \{ \Delta x_k \mid k = 1, 2, \dots, n \}$$

Yani $n \rightarrow +\infty$ olması $\|P\|$ ’nin sıfıra yaklaşmasını gerektirmez.

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots, 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2, \dots, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 1 \right\}$$

parçalanması göz önüne alındığında $\forall n \geq 2$ için $\|P\| = \frac{1}{2} \neq 0$ dır.

Eğer P parçalanması düzgün ise “ $\|P\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow +\infty$ ” önermesi doğrudur.

2.2. Merdiven Fonksiyonları

Belirli integral kavramı birçok değişik şekilde verilebilir. Bunların en yaygın olanı merdiven fonksiyonları yardımıyla verilenidir. Bu sebeple bu kısımda merdiven fonksiyonlarını tanıtmaya çalışacağız.

2.2.1. Tanım:

$s:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir merdiven fonksiyonudur. Ancak ve ancak $[a,b]$ aralığının öyle bir P parçalanması vardır ki, s fonksiyonu $[a,b]$ aralığının her açık alt aralığı üzerinde sabittir.

Yukarıdaki tanıma göre, eğer s bir merdiven fonksiyonu ise her bir $k=1,2,\dots,n$ için öyle bir s sabit sayısı vardır ki,

$$x \in (x_{k-1}, x_k) \text{ için } s(x) = s_k$$

dir.

s fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı olduğundan x_0, x_1, \dots, x_n noktalarında tanımlı olmalıdır, fakat fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerler s sayılarından biri olmak zorunda değildir. $[a,b]$ üzerinde tanımlı merdiven fonksiyonlarının cümlesi $M[a,b]$ ile gösterilir.

ÖRNEK 2.1.

$s:[0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$s(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \\ 1 & , \quad 1 < x \leq 2 \\ 2 & , \quad 2 < x < 3 \\ \frac{5}{2} & , \quad x = 3 \\ 3 & , \quad 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. Bu fonksiyonun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyon bir merdiven fonksiyonu mudur?

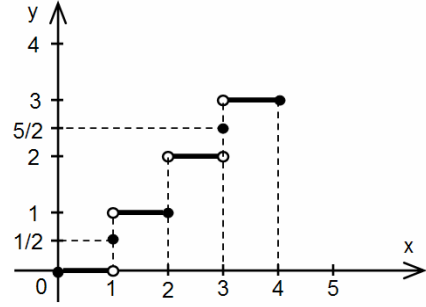
Çözüm:

$$0 < x < 1 \quad \text{için} \quad s(x) = 0$$

$$1 < x < 2 \quad \text{için} \quad s(x) = 1$$

$$2 < x < 3 \quad \text{için} \quad s(x) = 2$$

$$3 < x < 4 \quad \text{için} \quad s(x) = 3$$



ÖRNEK 2.2.

$f(x) = \llbracket x \rrbracket$ şeklinde tanımlanan $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir merdiven fonksiyonu mudur?

Çözüm:

$$-2 < x < -1 \quad \text{için} \quad f(x) = -2$$

$$-1 < x < 0 \quad \text{için} \quad f(x) = -1$$

$$0 < x < 1 \quad \text{için} \quad f(x) = 0$$

$$1 < x < 2 \quad \text{için} \quad f(x) = 1$$

olduğundan verilen fonksiyon merdiven fonksiyonudur.

ÖRNEK 2.3.

Posta ile gönderilen kolilerden 3 kg'a kadar 100 TL, 5 kg'a kadar 150 TL, 10 kg'a kadar 250 TL ücret alınmaktadır. 10 kg'a kadar olan her bir ağırlığa bir taşıma ücreti karşılık getiren ve “*Posta Ücret Fonksiyonu*” denilen fonksiyonun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyon bir merdiven fonksiyonu mudur?

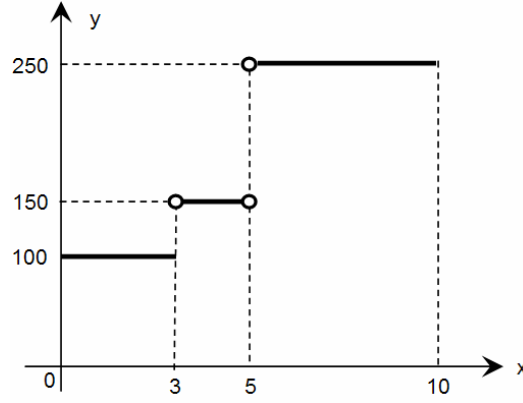
Çözüm: Bu fonksiyonu f ile gösterelim.

$$x \in (0, 3) \quad \text{için} \quad f(x) = 100$$

$$x \in (3, 5) \quad \text{için} \quad f(x) = 150$$

$$x \in (5, 10) \quad \text{için} \quad f(x) = 250$$

dır. o halde bu fonksiyon bir merdiven fonksiyonudur. Grafiği:



2.3. Merdiven Fonksiyonlarının İntegrali

İntegral kavramını verirken önce merdiven fonksiyonlarının integralini verecek, daha sonra diğer fonksiyonların integraline geçeceğiz.

2.3.1. Tanım:

$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir merdiven fonksiyonu, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ cümlesi $[a, b]$ aralığının bir parçalanması ve $x \in (x_{k-1}, x_k)$ için $s(x) = s_k$ olsun.

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n s_k \cdot \Delta x_k = s_1(x_1 - x_0) + s_2(x_2 - x_1) + \dots + s_n(x_n - x_{n-1}) \quad (2.3.1)$$

sayısına s merdiven fonksiyonunun ***a'dan b'ye kadar integrali*** denir, a ve b sayılarında da ***integrasyon*** adı verilir.

Şu halde bir s merdiven fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki integralini bulmak için, fonksiyonun (x_{k-1}, x_k) aralığı üzerinde aldığı s_k değerleri ile bu aralıkların uzunluklarını çarpıp elde edilen sayıları toplamalıdır.

ÖRNEK 2.4.

$$s(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \\ 1 & , \quad 1 < x < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $s : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[0, 3]$ aralığındaki integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\int_0^3 s(x) dx = 0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) = 0 + 1 + 2 = 3$$

Örnekte görüldüğü gibi, integralin değeri, fonksiyonun x_k parçalanma noktalarında aldığı değerlerden bağımsızdır.

Şimdi merdiven fonksiyonlarının integrallerinin özelliklerini gösteren bazı teoremleri göstereceğiz.

TEOREM 2.3.1. (Toplanabilme Özelliği):

$$s, t \in M[a, b] \text{ ise } \int_a^b [s(x) + t(x)] dx = \int_a^b s(x) dx + \int_a^b t(x) dx \text{ dir.}$$

TEOREM 2.3.2. (Homogenlik Özelliği):

$$s, t \in M[a, b] \text{ ve } c \in \mathbb{R} \text{ olsun. } \int_a^b c \cdot s(x) dx = c \int_a^b s(x) dx \text{ dir.}$$

TEOREM 2.3.3. (İntegrasyon Aralığına Göre Toplanabilme Özelliği):

$$s \in M[a, b] \text{ ve } a < c < b \text{ olsun. } \int_a^b s(x) dx = \int_a^c s(x) dx + \int_c^b s(x) dx \text{ dir.}$$

2.4. Kapalı Bir Aralıkta Tanımlı, Reel ve Sınırlı Bir Fonksiyonun Riemann İntegrali

Bu bölümde $M[a, b]$ merdiven fonksiyonları yardımıyla, $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel ve sınırlı gelişigüzel fonksiyonların Riemann anlamında integrallerini tanımlayacağız.

2.4.1. Tanım:

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \inf_{s \geq f} \left\{ \int_a^b s(x) dx : s \in M[a, b] \right\} \quad \text{ve} \quad \int_a^b f(x) dx = \sup_{t \leq f} \left\{ \int_a^b t(x) dx : t \in M[a, b] \right\}$$

sayılarına sırasıyla, Üst Darboux İntegrali ve Alt Darboux İntegrali denir.

$\int_a^b s(x) dx$ integrallerinin en büyük alt sınırı, Alt Darboux İntegrali ise $t \leq f$ olmak

üzere, $\int_a^b t(x) dx$ integrallerinin en küçük üst sınırıdır. Aşıkâr olarak

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \quad \text{'dir.}$$

2.4.2. Tanım:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = I$ ise f

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Riemann Anlamında integrallenebilirdir denir ve

$$\int_a^b f(x) dx = I \quad \text{yazılır.}$$

Yukarıdaki tanımı kullanarak bir fonksiyonun integralini hesaplamak çok zordur.

Şimdi başka türlü tanımlamaya çalışacağız.

2.4.3. Tanım:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer $[a, b]$ aralığının P parçalanması

için, $M_k = \sup \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$ ve $m_k = \inf \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$ diyelim.

$$\bar{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k \quad \text{ve} \quad A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k \quad \text{toplamlarına sırasıyla } f$$

fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen Üst Darboux Toplamı ve Alt Darboux Toplamı adı verilir.

TEOREM 2.4.1.

f , $[a, b]$ aralığında tanımlı, sınırlı bir fonksiyon ve P de $[a, b]$ aralığının bir

$$\text{parçalanması olsun. } \inf \bar{U}(f, P) = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \quad \text{ve} \quad \sup A(f, P) = \int_a^b f(x) dx$$

'dir. Burada infimum ve supremum $[a, b]$ aralığının tüm P parçalanmaları üzerinden alınmaktadır.

TEOREM 2.4.2.

P ve P_0 , $[a, b]$ aralığının iki parçalanması ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. P , P_0 'dan daha ince ise

$$(a) \quad A(f, P_0) \leq A(f, P)$$

$$(b) \quad \bar{U}(f, P_0) \geq \bar{U}(f, P)$$

dir.

2.4.4. Tanım:

$R(f, P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ toplamına f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık

gelen “Riemann Toplamı” denir.

Şimdi integrallenebilen fonksiyonları karakterize eden bir teorem verelim.

TEOREM 2.4.3.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için $\bar{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$;(Riemann şartı) kalacak şekilde $[a, b]$ 'nin bir parçalanmasının var olmasıdır.

TEOREM 2.4.4.

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olsun.

(a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise αf ve βg fonksiyonları da $[a, b]$ 'de integrallenebilir ve

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \text{ olur.}$$

(b) $f \geq 0$ ise $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ dir.

(c) f^2 integrallenebilirdir.

(ç) $f \geq 0$ ise \sqrt{f} integrallenebilir.

(d) $|f|$ integrallenebilir ve $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ dir.

(e) $f \cdot g$ integrallenebilir.

2.5. Riemann Anlamında İntegrallenebilen Bazı Fonksiyon Sınıfları

Bu kesimde Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyonların önemli bazı sınıfları verilecektir.

TEOREM 2.5.1.

$[a, b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir.

TEOREM 2.5.2.

$[a, b]$ aralığında parçalı sürekli ve sınırlı her fonksiyon $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirdir.

TEOREM 2.5.3.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton artan (veya azalan) ise f fonksiyonu $[a, b]$ 'de Riemann anlamında integrallenebilirdir.

2.5.1. Tanım:

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı salınımlıdır $\Leftrightarrow [a,b]$ 'nin her parçalanması için

$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$ kalacak şekilde en az bir M sayısı vardır. Supremum

$[a,b]$ 'nin tüm P parçalanmaları üzerinden alınmak üzere,

$s_f(a,b) = \sup \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ genişletilmiş reel sayısına f 'nin $[a,b]$

aralığındaki **total salınımı** adı verilir. Şu halde $s_f(a,b) < \infty$ ise f fonksiyonu sınırlı salınımlıdır.

TEOREM 2.5.4.

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sınırlı salınımlı olması için gerek ve yeter şart iki monoton artan fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilesidir.

SONUÇ 2.5.1.

$[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı her fonksiyon Riemann anlamında integrallenebilir.

TEOREM 2.5.5.

f , $[a,b]$ aralığında ve Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

Eğer $\forall x \in (a,b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak biçimde sürekli bir $F:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonu varsa, $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$ dir.

NOT:

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2) \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx \quad (b \geq a)$$

ÖRNEK 2.5.

$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$F(x) = \int \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int (x^{-2} + x^{-3/2}) dx = -\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

olacağından

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = -\left[\left(\frac{1}{4} + 1\right) - (1 + 2)\right] = \frac{7}{4}$$

olur.

Şimdi yukarıdaki teoremin basit bir sonucu olan bir teoremi ifade edeceğiz.

TEOREM 2.5.6.

f , $[a, b]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

(1) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır, yani

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots = \int_a^b f(z) dz$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ dir.}$$

TEOREM 2.5.7.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. $[a, b]$ üzerinde

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonunun f 'nin sürekli olduğu

her noktada türevlidir ve $F'(x) = f(x)$ dir.

TEOREM 2.5.8.

Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise $[a, b]$ üzerinde türevli bir F fonksiyonu vardır ve $\forall x \in [a, b]$ için $F'(x) = f(x)$ dir.

TEOREM 2.5.9.

$\varphi:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir türeve sahip bir fonksiyon ve f de φ 'nin görüntü

cümlesi ise $\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$ dir.

ÖRNEK 2.6.

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dir. $\varphi(t) = \sin t$ alalım.

$$\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

olduğundan $a = 0$ ve $b = \frac{\pi}{2}$ dir.

$$f(\varphi(t)) = f(\sin t) = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$$

olur. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ için $\cos t \geq 0$ olduğundan $f(\varphi(t)) = \cos t$ olur. Buna göre

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{4} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 2.7.

$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2} \cdot x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $1+x^2 = t$ denirse $dt = 2x dx$ olur. Diğer taraftan

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 4$$

olacağından

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2} \cdot x dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} t^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{1}{3} (8-1) = \frac{7}{3}$$

elde edilir.

Bazı integralleri hesaplarken birden fazla değişken değiştirmesi gerekebilir. Bununla ilgili iki örnek aşağıda verilmiştir.

ÖRNEK 2.8.

$A = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = \tan \varphi$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$A = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan \varphi) d\varphi$$

olur. $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ olduğundan

$$A = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos \varphi) d\varphi$$

bulunur. Şimdi son integralde $\varphi = \frac{\pi}{4} - \theta$ dönüşümü yaparak hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \ln(\cos \varphi) d\varphi &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sqrt{2}}\right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln(\cos \theta + \sin \theta) d\theta - \frac{\pi}{4} \ln \sqrt{2} \end{aligned}$$

bulunur. Bu değer yukarıda yerine konursa

$$A = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos \theta + \sin \theta) d\theta + \frac{\pi}{4} \ln \sqrt{2}$$

bulunur. İntegralin değeri integral değişkenine bağlı olmadığından birinci ve ikinci integraller eşittir. O halde

$$A = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \ln 2$$

olur.

ÖRNEK 2.9.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ için $\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 x}} dx = \frac{\pi \alpha}{\tan \alpha}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x = \pi - t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 x}} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \cdot \sin(\pi - t)}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cdot \sin^2(\pi - t)}} dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 t}} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \cdot \sin t}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 t}} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 t}} dt \end{aligned}$$

olur. $\cos t = -u$ değişken değiştirmesi ile

$$I = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha \cdot (1 - u^2)}}$$

bulunur. $u = \frac{\theta}{\sin \alpha}$ değişken dönüştürmesi yapılırsa,

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \int_{-\sin \alpha}^{\sin \alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2 \tan \alpha} \operatorname{Arcsin} \theta \Big|_{-\sin \alpha}^{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2 \tan \alpha} (\alpha + \alpha) = \frac{\pi \alpha}{\tan \alpha}$$

sonucu elde edilir. Şimdi α 'ya bağlı bazı özel değerler verelim. Mesela $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ise

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx = \frac{\pi^2}{4} \text{ bulunur. } \alpha \text{ 'ya buna benzer çeşitli değerler verilebilir.}$$

Bazı durumlarda f 'nin ilkeli olan F fonksiyonu bulunmadan da integral hesaplanabilir.

ÖRNEK 2.10.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\sin^2 x}} dx \text{ integralini hesaplayınız.}$$

$$\text{Çözüm: } x = \frac{\pi}{2} - t \text{ dönüşümü yapılırsa, } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}} dx \text{ bulunur. O}$$

halde, yukarıdaki integral ile bu integrali toplarsak,

$$2.I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

olup, dolayısıyla $I = \frac{\pi}{4}$ olur.

ÖRNEK 2.11.

$f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun.

a) f tek fonksiyon ise $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ dır.

b) f çift fonksiyon ise $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ dır. Gösteriniz.

Çözüm: $I = \int_{-a}^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^a f(x) dx}_{I_2}$ olsun. I_1 integralinde $x = -t$

değişken değiştirmesi yapılırsa, integralin değeri değişkene bağlı olmadığından

$$I_1 = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$$

yazılabilir. O halde

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

olur.

a) f tek fonksiyon olduğunda $f(-x) = -f(x)$ olacağından

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) - f(x)] dx = \int_0^a 0 \cdot dx = 0$$

olur.

a) f çift fonksiyon olduğunda $f(-x) = f(x)$ olacağından

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(x)] dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

bulunur.

Şimdi de belirli integraller için kısmî integrasyon formülünü verelim.

TEOREM 2.5.10.

f ve g , $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve (a, b) 'nda türevli olsunlar.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

dir. Burada $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ yazılırsa,

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

şeklinde de ifade edilebilir.

ÖRNEK 2.12.

$\int_1^e \ln x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

olur. Buradan

$$\int_1^e \ln x dx = x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e dx = e - (e - 1) = e - e + 1 = 1$$

olur.

ÖRNEK 2.13.

$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx$ integralini hesaplayınız. ($n \in \mathbb{N}$)

Çözüm: $x = \sin t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \cdot \cos x dx = \sin x \cdot \cos^{2n} x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2n \cdot \sin^2 x \cdot \cos^{2n-1} x dx \\ &= 2n \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{2n-1} x dx = 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x dx - 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \cdot \cos^2 x dx \end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx - 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx$$

yazılabilir. Son integral başa alınır ve her iki taraf $2n+1$ ile bölünürse

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} x \, dx$$

rekürans formülü elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-3} x \, dx \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

bulunur. Şu halde

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

olur.

Birinci Ortalama Değer Teoremi:

f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve g ile $f \cdot g$ bu aralıkta integrallenebilir olsunlar. g , $[a, b]$ üzerinde her yerde aynı işaretli ve f sınırlı ise $[\inf f, \sup f]$

aralığında öyle bir k sabiti vardır ki, $\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = k \int_a^b g(x) \, dx$ 'dir. Eğer f

fonksiyonu $[a, b]$ 'de sürekli ise $[a, b]$ 'deki en az bir x_0 noktası için

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = f(x_0) \int_a^b g(x) \, dx \text{ olur.}$$

ÖRNEK 2.14.

$f(x) = 2 + \sin x$ fonksiyonunun $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz.

Fonksiyon bu değeri hangi noktada alır?

Çözüm:

$$k = \frac{1}{b-a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 + \sin x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\left(2 \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left(-2 \frac{\pi}{2} - \cos \frac{-\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2$$

olur.

$$2 + \sin x = 2 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

olduğundan fonksiyon bu ortalama değeri $x_0 = 0$ noktasında alır.

İkinci Ortalama Değer Teoremi:

f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve $g \geq 0$, $f \cdot g$ ile g integrallenebilir, f sınırlı ve $m \leq \inf f \leq \sup f \leq M$ ise $[a, b]$ aralığında öyle bir c noktası vardır ki

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = m \int_a^c g(x) dx + M \int_c^b g(x) dx \text{ dır.}$$

2.6. $\int_a^x f(u) du$ 'nun Sürekliliği, İlkel Fonksiyonlar, Diferansiyel ve İntegral

Hesabının Temel Teoremi

f fonksiyonu $[a, b]$ 'de sınırlı ve integrallenebilir olsun. $x \in [a, b]$ olarak

aldığımızdan $\int_a^x f(u) du$, x 'in bir fonksiyonudur.

$$F(x) = \int_a^x f(u) du, \quad \forall x \in [a, b] \text{ için } |f(x)| \leq M \text{ olsun. } x > x_0 \text{ alalım.}$$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(u) du - \int_a^{x_0} f(u) du \right| = \left| \int_{x_0}^x f(u) du \right| \leq \int_{x_0}^x |f(u)| du \leq M(x - x_0)$$

$$\text{Şu halde } |x - x_0| < n(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M} \text{ alırsak, } |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \text{ olur. Yani}$$

$$F(x) = \int_a^x f(u) du, \quad x \text{ 'in sürekli bir fonksiyonudur.}$$

2.6.1. Belirsiz İntegral ile Belirli İntegral Arasındaki Bağntı. İlkel Fonksiyonlar:

Eğer $[a, b]$ aralığında f integrallenebiliyorsa, gördük ki $\int_a^x f(u) du$ sürekli bir

fonksiyondur. Bundan başka $F(x) = \int_a^x f(u) du$ fonksiyonu sınırlı salınımlıdır.

Çünkü $\forall x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M$ ise $x_{i-1} < x_i$ olduğuna göre,

$$|F(x_i) - F(x_{i-1})| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(u) du \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(u)| du \leq M(x_i - x_{i-1})$$

dir. Yani F 'nin $[a, b]$ aralığındaki total salınımı en fazla $M(b-a)$ 'dır.

2.6.2. Diferansiyel ve İntegral Hesabının Temel Teoremi:

Şimdi gösterelim ki, eğer f sürekli ise, F türevlenebilirdir ve $F'(x) = f(x)$ 'dir.

Gerçekten, $h > 0$ için

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(u) du - \int_a^x f(u) du = \int_x^{x+h} f(u) du = h \cdot f(\xi)$$

dir. Burada integral hesabının birinci ortalama değer formülünü kullandık. ξ değeri:

$x, \dots, x-h$ aralığında alınan uygun bir değerdir. Şu halde

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$$

dir. f fonksiyonu x yerinde sürekli olduğundan, h 'yi yeter derecede küçük

almakla, $f(\xi)$ ile $f(x)$ arasındaki fark, istenildiği kadar küçük bir $\varepsilon > 0$

sayısından daha küçük yapılabilir. Yani $h < n$ için

$$|f(\xi) - f(x)| = \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$$

dir. Böyle türevi, integral işareti altındaki f fonksiyonuna eşit olan fonksiyonlara,

f 'nin “*ilkel fonksiyonları*” denir.

Eğer F ve G , f 'nin herhangi iki ilkel fonksiyonu ise, $F - G$ de türevlenebilir

ve bu türev besbelli sıfırdır. Demek ki f 'nin bütün ilkel fonksiyonları $F + c$

şeklindedir.

Eğer f 'nin bir ilkel fonksiyonu G ise, $a \leq x \leq b$ için $\int_a^x f(u) du - G(u) = c$ dir,

yani bir sabittir. $x = a$ için integral sıfır olduğundan, $c = G(a)$ bulunur. O halde,

$\int_a^x f(u) du = G(x) - G(a)$ ve $x = b$ için $\int_a^x f(x) dx = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$ elde edilir.

Diferansiyel ve İntegral Hesabın Temel Teoremi: f fonksiyonu $[a, b]$ kompakt aralığında sürekli ise G , f 'nin orada muhakkak mevcut olduğunu bildiğimiz bir

ilkel fonksiyonu ise, $\int_a^x f(x) dx = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a)$ dır.

Böylece belirsiz integraller hakkında evvelce gördüğümüz bütün integralleme yöntemlerini belirli integrallerin hesabı için de uygulayabilir.

Belirli integralin hesabı sırasında değişken değiştirmesi yapılıyorsa, sınırlar ya değişken değiştirmesi yapılırken değiştirilir, yahut da integral önce belirsiz olarak hesap edildikten sonra, tekrar eski değişkenlere dönülerek, integralin verilen sınırları üzerinden belirli integral hesaplanır. Buna bir örnek vererek açıklayalım.

ÖRNEK 2.15.

$\int_{-a}^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = a \cdot \tan t$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}, \quad t = \text{Arc tan } \frac{x}{a}$$

olur. Buna göre yeni integralin sınırları

$$x = a \text{ için } t = \frac{\pi}{4}$$

$$x = -a \text{ için } t = -\frac{\pi}{4}$$

olur.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} &= a \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{a^3 (1 + \tan^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2 t (1 + \tan^2 t)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t \, dt = \frac{1}{a^2} \sin t \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{a^2}\end{aligned}$$

dir. şimdi de integrali belirsiz olarak hesap edelim ve yine aynı şekilde $x = a \cdot \tan t$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cos^2 t (1 + \tan^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \cos t \, dt = \frac{\sin t}{a^2}$$

$\frac{x}{a} = \tan t$ koyduğumuzdan, demek ki $\sin t = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ olur. Yani

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{a^2} \frac{a + a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{a^2}$$

olur.

2.7. Bazı Limitlerin İntegraller Yardımıyla Hesabı

Bu kesimde bazı özel tipteki limitlerin integraller yardımıyla nasıl hesaplanacağını göstereceğiz.

TEOREM 2.7.1.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$ dir.

ÖRNEK 2.16.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}} \right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

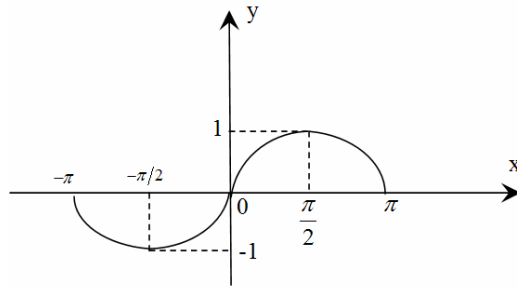
Yukarıdaki tablodan da görüldüğü üzere $-1 \leq x \leq 1$ ve $3 \leq x \leq 4$ aralıklarında $f(x) \geq 0$; $1 \leq x \leq 3$ aralığında $f(x) < 0$ dır. Buradan

$$\int_{-1}^4 |x^2 - 4x + 3| dx = + \int_{-1}^1 (x^2 - 4x + 3) dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{37}{3}$$

olacaktır.

2) $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin^5 x| dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Önce $\sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



$-\pi < x < 0$ için $\sin x < 0$

$-\pi < x < 0$ için $\sin x > 0$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin^5 x| dx &= \int_{-\pi}^0 |\sin^5 x| dx + \int_0^{\pi} |\sin^5 x| dx = - \int_{-\pi}^0 \sin^5 x dx + \int_0^{\pi} \sin^5 x dx \\ &= \left(\cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{16}{5} + \frac{16}{5} = \frac{32}{5} \end{aligned}$$

elde edilir.

3) $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - \sin^2 x} \cdot \cos^3 x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - \sin^2 x} \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx$ yazıp ve $\sin x = \sqrt{2} \sin t$ değişken

değiştirmesi yaparsak,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2-2\sin^2 t} \cdot (1-2\sin^2 t) \cdot \sqrt{2} \cos t \, dt = 2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2 t} \cdot (1-2\sin^2 t) \cdot \cos t \, dt \\
&= 2 \int_0^{\pi/4} |\cos t| \cdot (1-2\sin^2 t) \cdot \cos t \, dt = 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \cdot (1-2\sin^2 t) \, dt \\
&= 2 \int_0^{\pi/4} (\cos^2 t - 2\sin^2 t \cdot \cos^2 t) \, dt = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt - 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 2t}{2} \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} \, dt \\
&= \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (1-\cos^2 2t) \, dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 4t}{2} \, dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{4+\pi}{8}
\end{aligned}$$

4) $\int_1^4 x^{\llbracket x \rrbracket} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$1 \leq x < 2 \quad \text{için} \quad \llbracket x \rrbracket = 1$$

$$2 \leq x < 3 \quad \text{için} \quad \llbracket x \rrbracket = 2$$

$$3 \leq x < 4 \quad \text{için} \quad \llbracket x \rrbracket = 3$$

olduğundan

$$\int_1^4 x^{\llbracket x \rrbracket} dx = \int_1^2 x \, dx + \int_2^3 x^2 \, dx + \int_3^4 x^3 \, dx = \frac{619}{12}$$

bulunur.

5) $f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ fonksiyonunun $[-1, 3]$ aralığındaki integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$-1 \leq x < 0 \quad \text{için} \quad f(x) = -1$$

$$0 \leq x < 1 \quad \text{için} \quad f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \quad \text{için} \quad f(x) = 1$$

$$2 \leq x < 3 \quad \text{için} \quad f(x) = 2$$

olduğundan

$$\int_{-1}^3 \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor dx = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^3 2 dx = (-x) \Big|_{-1}^0 + x \Big|_1^2 + 2x \Big|_2^3$$

$$= -(0-1) + (2-1) + 2(3-2) = 1+1+2 = 4$$

bulunur.

6) $\int_0^2 |1-x| dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $|1-x| = \begin{cases} 1-x & , \quad x \in [0,1] \\ x-1 & , \quad x \in [1,2] \end{cases}$ olduğundan

$$\int_0^2 |1-x| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 1$$

bulunur.

7) $a < b$ olduğuna göre $\int_a^b \frac{|x|}{x} dx$ integralini hesap ediniz.

Çözüm:

i) $0 < a < b$ için $\frac{|x|}{x} = 1$ olup $\int_a^b \frac{|x|}{x} dx = \int_a^b 1 dx = b - a$

ii) $a < b < 0$ için $\frac{|x|}{x} = -1$ olup $\int_a^b \frac{|x|}{x} dx = \int_a^b (-1) dx = a - b$

iii) $a < 0 < b$ için $\int_a^b \frac{|x|}{x} dx = \int_a^0 \frac{|x|}{x} dx + \int_0^b \frac{|x|}{x} dx = \int_a^0 (-1) dx + \int_0^b 1 dx = a + b$

NOT:

Belirli integralden faydalanarak, terim sayısı sonsuza giden bazı toplamların limitleri de hesaplanabilir. Bunun için böyle toplamı bir Riemann toplamı şeklinde ifade etmek gerekir.

Mesela $[0,1]$ aralığını $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ noktalarını bölüm noktaları olarak n parçaya

bölerek $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ olur. f sürekli bir fonksiyonu göstermek üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \int_0^1 f(x) dx$$

şeklinde de ifade edilebilir.

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ limitini belirli integralden istifade ederek hesap ediniz.

Çözüm:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \right)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $f(x) = x$ dir. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

olur.

9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$ limitini belirli integralden faydalanarak

hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} + \frac{1}{\frac{n+2}{n}} + \cdots + \frac{1}{\frac{n+n}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \end{aligned}$$

olup $f(x) = \frac{1}{1+x}$ dir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2$$

elde edilir.

10) Belirli integralden yararlanarak

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \text{ limitini hesaplayınız.}$$

Çözüm: Burada $f(x) = \sin x$ dir. O halde

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$$

dir.

$$11) I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right) \text{ limitini hesaplayınız.}$$

Çözüm:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{1+0}} + \sqrt{\frac{n}{1+\frac{3}{n}}} + \sqrt{\frac{n}{1+\frac{6}{n}}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{1+\frac{3(n-1)}{n}}} \right)$$

olup $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}}$ dir. O halde

$$I = \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{1+x}} \, dx = 2 \sqrt{1+x} \Big|_0^3 = 2$$

olur.

12) $g(x) = \sin^2 x$ fonksiyonunun $[0, 2]$ 'daki ortalama değerini bulunuz.

Çözüm: Burada $e^x = t \Rightarrow x = \ln t$ koyarsak $dx = \frac{dt}{t}$

$$g(\xi) = \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t}{t+1} \right) \Big|_1^{e^2} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1+e^2}$$

olur.

$$13) \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \int_0^{n^2} \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor dt = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

İspat: $f(t) = \left\lfloor t^{1/2} \right\rfloor$ olsun.

$$\begin{aligned}
0 \leq f(t) < 1 &\Rightarrow f(t) = 0 \\
1 \leq f(t) < 4 &\Rightarrow f(t) = 1 \\
4 \leq f(t) < 9 &\Rightarrow f(t) = 2 \\
&\vdots \\
(n-1) \leq f(t) < n &\Rightarrow f(t) = n-1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_0^{n^2} \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt &= \int_0^1 0 dt + \int_1^4 1 dt + \int_4^9 2 dt + \dots + \int_{(n-1)^2}^{n^2} (n-1) dt \\
&= 0 + 1(4-1) + 2(9-4) + (n-1)[n^2 - (n-1)^2] \\
&= 1.3 + 2.5 + \dots + (n-1)(2n-1) \\
&= \sum_{k=1}^n (k-1)(2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k^2 - 3k + 1) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + n \\
&= 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}
\end{aligned}$$

bulunur.

14) $\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor dx = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor dx &= \int_0^1 \lfloor x^2 \rfloor dx + \int_1^{\sqrt{2}} \lfloor x^2 \rfloor dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \lfloor x^2 \rfloor dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \lfloor x^2 \rfloor dx \\
&= \int_0^1 0 dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1 dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 3 dx = (\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3(2 - \sqrt{3}) \\
&= 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

15) $\int_a^b \lfloor x \rfloor dx + \int_a^b \lfloor -x \rfloor dx = a - b$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\int_a^b \lfloor x \rfloor dx + \int_a^b \lfloor -x \rfloor dx = \int_a^b (\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor) dx = I$$

$[a, b) = [1, 2)$ olsun. Buradan $x \in [1, 2) \Rightarrow -x \in [-2, -1)$ olur. $\llbracket x \rrbracket = 1$ ve $\llbracket -x \rrbracket = -2$ olup

$$I = \int_a^b (1-2) dx = \int_a^b (-1) dx = \int_b^a dx = x \Big|_b^a = a - b$$

olur.

2.9. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER

1) Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların $[-1, 3]$ aralığındaki integralini hesap ediniz.

a) $f(x) = \llbracket x \rrbracket$

b) $f(x) = 2\llbracket x \rrbracket$

c) $f(x) = \llbracket x \rrbracket + \left\llbracket x + \frac{1}{2} \right\rrbracket$

ç) $f(x) = \llbracket 2x \rrbracket - \llbracket -x \rrbracket$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^n \llbracket x \rrbracket dx = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu gösteriniz.

3) $\int_0^{10} 2^x dx$ integralini hesaplayınız.

4) $x \geq 0$ için $f(x) = \int_0^x \llbracket t \rrbracket dt$ olsun. f 'nin $[0, 4]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

5) $\int_0^9 \llbracket \sqrt{t} \rrbracket dt$ integralini hesaplayınız.

6- a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\int_0^n \llbracket t \rrbracket^2 dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ olduğunu gösteriniz.

b) $x \geq 0$ için $f(x) = \int_0^x \llbracket t \rrbracket^2 dt$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $[0, 3]$

aralığındaki grafiğini çiziniz.

7) Aşağıdaki eşitliklerin doğru olup olmadıklarını gösteriniz.

$$a) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{100}{3}$$

$$b) \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \ln \frac{4}{3}$$

$$c) \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6 + 4}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$ç) \int_0^{a/2} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = \frac{a}{4} (\pi - 2)$$

$$d) \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

$$e) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2+\pi}{4}$$

8) Aşağıdaki eşitliklerde $c \geq 0$ sayısını bulunuz.

$$a) \int_0^c x(1-x) dx = 0$$

$$b) \int_0^c |x(1-x)| dx = 0$$

9) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right) = 2\sqrt{2} - 2$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^{n-1}}}{n} \right) = e - 1$$

$$ç) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^\lambda + 2^\lambda + 3^\lambda + \dots + n^\lambda}{n} \right) = \frac{1}{\lambda+1} \quad (\lambda \geq 0)$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(\sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}} \right) = 2 \ln 2 - 1$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \cdots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) = 1$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$10) \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx \text{ integralini hesaplayınız.}$$

$$11) \int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 x| dx \text{ integralini hesaplayınız.}$$

BÖLÜM 3

BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI

3.1. Alan Hesapları

3.1.1. Dik Açılı Koordinat Sistemlerinde Alan Hesabı

Belirli integralin, f fonksiyonunun grafiği ile, yani

$f = \{(x, y) | y = f(x), x \in [a, b]\}$ ile x eksenini arasında kalan bölgenin alanını

verdiğini biliyoruz. $\int_a^b f(x) dx$ integrali, $y = f(x)$ eğrisi ile x eksenini ve

$x = a$, $x = b$ apsisleri tarafından sınırlanan bölgenin alanıdır. Fakat çoğu zaman, kapalı bir eğri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak gerekir. Örneğin bir elipsin alanını bu çeşit integral yardımıyla bulmak istersek, bu elips bölgesini, x eksenini, ilgili apsisler ve eğrinin tek anlamlı dalı tarafından sınırlanan birkaç alt bölgeye ayırmak icap eder. Böylece, $x^2 + y^2 = R^2$ ile verilen bir dairenin alanını bulmak için, bunun alt ve üst yarısını ayrı ayrı hesaplayabiliriz. Yani aradığımız alan

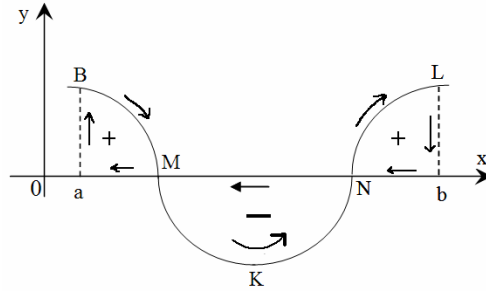
$S = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ dir. Bu integrale ise, $x = R \sin t$ konduğunda $dx = R \cos t dt$

ve $t = \arcsin \frac{x}{R}$ olup,

$$S = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

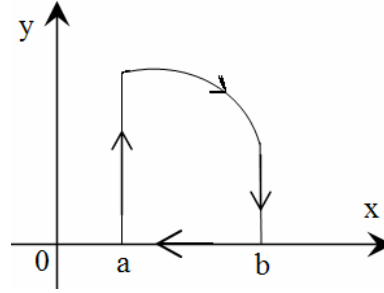
elde edilir.

Şimdi, kapalı bir eğri tarafından sınırlanan alanların genel olarak hesabını görelim. Bunun için önce bu çeşit alanlara, kenar eğrilerinin dolaşım yönüne göre bir işaret verelim: Eğer kapalı bir bölgenin kenar eğrisi, bu bölge sol tarafta kalacak şekilde, yani saat ibresinin hareketinin tersi yönde dolaşıyorsa, bu eğrinin dolaşım yönüne “**pozitif dolaşım yönü**” ; aksi halde “**negatif dolaşım yönü**” diyeceğiz. Kenar eğrisi pozitif yönde dolaşan bir alanı negatif işaretli olarak, kenar eğrisi negatif yönde dolaşan bir alanı ise pozitif işaretli olarak alacağız.



Şekil 3.1.

Şekil 3.1'de x eksenini ile eğri ve ilgili apsiler arasında kalan alanlara bakacak olursak, abM alanı negatif yönde dolaşıldığından pozitif işaretli; MKN alanı pozitif yönde dolaşıldığından negatif işaretli ve NLb alanı negatif yönde dolaşıldığından pozitif işaretlidir.



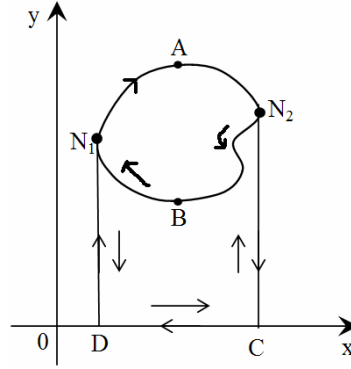
Şekil 3.2.

Eğri denkleminin parametrik olarak verilmesi halinde, kapalı bir eğri ile sınırlanan bölgenin alanını hesaplamada yukarıda söylediğimiz zorluklar ortaya çıkmaz. Gerçekten $t \in [\alpha, \beta]$ içi eğrimizin denklemi $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ olsun. Önce eğrinin kapalı olmadığını kabul edelim. $x = a$ değerine $t = \alpha$ ve $x = b$ değerine $t = \beta$ karşılık gelsin. Böylece sınırlanan bölgenin alanını bulmak için Şekil 3.2.'ye göre, $S = \int_a^b f(x) dx$ formülünde $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ koyarsak, alan formülü olarak $S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \phi'(t) dt$ elde ederiz. Tabii burada biz, $[a, b]$ aralığına tek anlamlı bir şekilde $[\alpha, \beta]$ parametre aralığı karşılık geldiğini ve bu aralıkta $\phi'(t) \neq 0$ olduğunu kabul ediyoruz.

Şimdi de eğrinin kapalı olduğunu kabul edelim. t parametresi α 'dan β 'ya değerler alırken eğrinin bir kere dolaşıldığını kabul edersek, kapalılıktan dolayı

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \quad , \quad \phi(\alpha) = \phi(\beta)$$

şartları sağlanmalıdır. Eğrinin köşe noktaları olmadığını da kabul edersek, $\varphi'(t)$ ve $\phi'(t)$ türevlerini mevcut ve sürekli kabul edebiliriz. Bundan başka kapalı eğriyi konveks olarak düşünelim, yani herhangi bir doğru tarafından en fazla iki noktada kesilsin. Eğrinin dikey teğetleri olduğu noktalar, yani $\dot{\phi}(t)$ 'nin sıfır olduğu noktalar N_1 ve N_2 olsun. t parametresi α 'dan β 'ya kadar değerler aldığı zaman kapalı eğri belli bir yönde dolaşılır. Bu yönün Şekil 3.3.'de ok ile gösterilen yön olduğunu kabul edelim.



Şekil 3.3.

Bu halde

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) \cdot \varphi(t) dt \quad (3.1)$$

integrali ile gösterilen alan, şekilde negatif yönde dolaşılan $N_1AN_2CDN_1$ eğrisinin sınırladığı negatif alanın toplamına eşittir. Yani genel olarak (3.1.) integrali, kapalı bir eğrinin sınırladığı alanı işaret farkı ile verir.

(3.1) formülüne kısmî integraleme metodunu uygularsak

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) dt = \phi(t) \cdot \varphi(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \cdot \dot{\phi}(t) dt \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \cdot \phi(t) dt \end{aligned}$$

veya

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\phi(t) \cdot \dot{\phi}(t) - \dot{\phi}(t) \cdot \phi(t)] dt \quad (3.2)$$

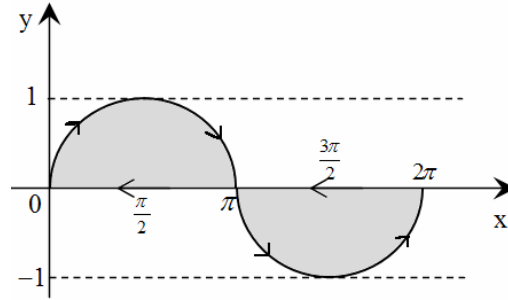
formülünü elde ederiz.

Burada öne sürdüğümüz şartların sağlanmadığını düşünürsek, mesela eğrinin konveks olmadığını, sonlu çoklukta köşe noktaları olduğunu kabul edersek, bulduğumuz bu formül yine geçerlidir, çünkü böyle bir kapalı eğri konveks eğrilere ayrılabilir, sonlu çoklukta köşe noktalarında ise, $\dot{\phi}(t)$ ve $\phi(t)$ fonksiyonlarının sıçrama şeklindeki süreksizlikleri vardır; fakat bildiğimiz gibi, böyle bir fonksiyon integrallenebilir.

ÖRNEK 3.1.

$[0, 2\pi]$ aralığında $y = \sin x$ eğrisi arasında kalan alanı hesaplayınız.

Çözüm: Önce $y = \sin x$ eğrisinin grafiğini çizelim.



Grafikte de görüldüğü gibi, sınırlanan alan $[0, \pi]$ aralığında pozitif; $[\pi, 2\pi]$ aralığında negatiftir. Demek ki aranılan alan

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| \quad \text{yahut} \quad \sin x = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ -\sin x, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

olduğundan

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx$$

dir. Yani

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4 \quad br^2$$

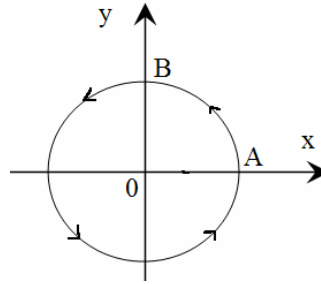
olur.

ÖRNEK 3.2.

$x = R \cdot \cos t$, $y = R \cdot \sin t$ dairesinin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

Burada t parametresi $[0, 2\pi]$ aralığını taramaktadır. $t = 0$ noktasının $A(R, 0)$ noktası, $t = \frac{\pi}{2}$ noktasına $B(0, R)$ noktası karşılık geldiğinden, demek ki eğri pozitif yönde dolaşmaktadır. O halde alan negatif işaretli olarak çıkacaktır. Gerçekten $\dot{x} = -R \cdot \sin t$ olduğundan



$$S = -R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -\pi R^2$$

bulunur. Fakat alan negatif olmayan bir büyüklük olduğu için, böyle hallerde ifadenin mutlak değeri alınır.

ÖRNEK 3.3.

a yarıçaplı bir çember, xOy düzlemi içinde x -ekseni üzerinde yuvarlansın. Bu takdirde çember üzerindeki herhangi bir nokta âdi bir sykloid (sikloid) eğrisi çizer. Bu eğrinin denklemi

$$x = a(t - \sin t) \quad , \quad y = a(1 - \cos t)$$

dir. Bu eğrinin bir yayı ile x -ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.

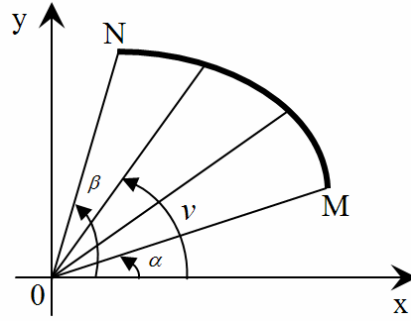
Çözüm:

Bu alan besbelli

$$A = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t - 2 \cos t) \, dt = 3\pi a^2$$

olur.

3.1.2. Kutupsal Koordinat Sistemlerinde Alan Hesabı



Şekil 3.4.

NM eğrisi kutupsal koordinatlara göre $r = f(v)$ denklemiyle verilmiş olsun. OMN diliminin alanını hesaplamak istiyoruz. $\forall v \in [\alpha, \beta]$ için $f(v)$, pozitif ve sürekli bir fonksiyon olsun. $\beta - \alpha$ açısını aşağıdaki şekilde parçalayalım.

$$\alpha = v_0 < v_1 < v_2 < \dots < v_{n-1} < v_n = \beta$$

ve gerekli yarıçap vektörleri çizelim. Şimdi

$$\sup_{v \in [v_{i-1}, v_i]} f(v) = M_i, \quad \inf_{v \in [v_{i-1}, v_i]} f(v) = m_i$$

diyelim. $v_i - v_{i-1} = \Delta v_i$ koyalım. Bu i-inci dilimin alanı $\frac{1}{2} M_i^2 \cdot \Delta v_i$ ile $\frac{1}{2} m_i^2 \cdot \Delta v_i$

arasındadır. Demek ki aradığımız OMN diliminin alanını $S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \cdot \Delta v_i$ ile

$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \cdot \Delta v_i$ toplamaları arasındadır. Bunlar ise bildiğimiz gibi $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(v)]^2 dv$

integralinin Darboux toplamlarıdır. Yani

$$OMN \text{ Diliminin Alanı} = \lim_{\max \Delta v_i \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \cdot \Delta v_i = \lim_{\max \Delta v_i \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \cdot \Delta v_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(v)]^2 dv \quad (3.3)$$

dir.

ÖRNEK 3.4.

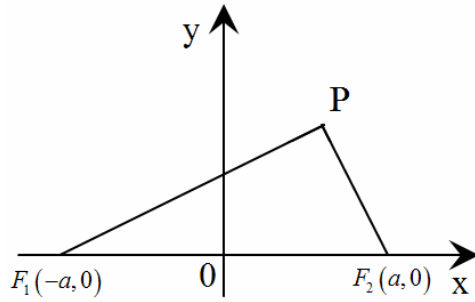
Leminskat eğrisinin bir fiyonku tarafından meydana getirilen alanı hesap ediniz.

Çözüm:

Önce Leminskat eğrisini geometrik olarak tanımlayalım, bunun dik açılı koordinatlara ve kutupsal koordinatlara göre denklemlerini çıkartalım.

Birbirlerinden $2a$ uzaklığında F_1 ve F_2 gibi sabit iki noktadan uzaklıkları çarpımı a 'ya eşit olan noktaların geometrik yerine bir **Leminskat** denir.

1⁰. Leminskat eğrisinin dik açılı koordinat sistemine göre denklemi:



Şekil 3.5.

F_1F_2 doğrusunu x eksenini, F_1F_2 'nin orta noktasını 0 başlangıç noktası olarak alalım ve bu noktada F_1F_2 'ye dik y eksenini çizelim. Buna göre aranılan denklem:

$$\left[(x+a)^2 + y^2 \right] \left[(x-a)^2 + y^2 \right] = a^4$$

bağıntısından

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \quad (3.4)$$

olarak bulunur.

2⁰. Leminskat eğrisinin kutupsal koordinat sistemine göre denklemi:

(3.4.) denklemde $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$ koyarsak,

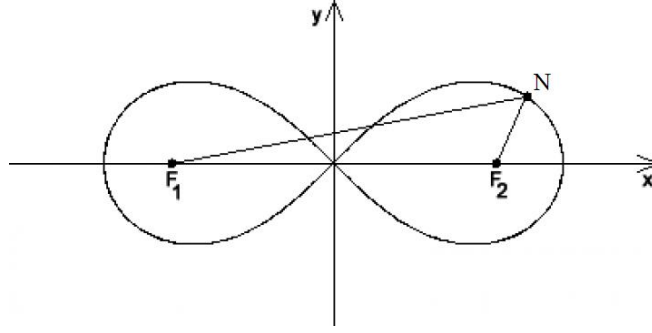
$$r^4 - 2a^2r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0 \quad \text{veya} \quad r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

bulunur.

3⁰. Leminskat eğrisinin bir fiyonkunun bir parçasının sınırladığı alan:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 d\varphi = a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2$$

dir. bu eğriyi (Bkz. Şekil 3.6.) ilk defa Jaque Bernoulli incelediği için, buna ekseriyetle "**Bernoulli Leminskati**" denir.



Şekil 3.6.

3.1.3. Eğri Denkleminin Parametrik Olarak Verilmesi Halinde Alan Hesabı

Parametrik denklemi, g türevlenebilir ve h sürekli olmak üzere,

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

olan bir C eğrisi, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x -ekseni tarafından sınırlanan A alanını hesaplamak için

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b |y| dy$$

integralini t cinsinden ifade etmek gerekir. $y = h(t)$, $dx = g'(t) dt$ dir. t 'nin a ve b 'ye karşılık gelen değerlerine t_1 ve t_2 dersek,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| \cdot g'(t) dt$$

olur.

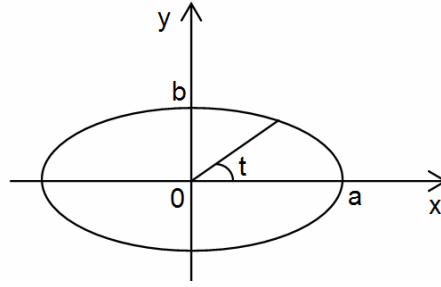
ÖRNEK 3.5.

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$$

parametrik denklemleriyle verilen elipsin (elips tarafından çevrelenen bölgenin) alanını bulunuz.

Çözüm:

Önce elipsin dörtte bir parçasının alanını bulalım.



$$x = 0 \quad \text{için} \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$x = a \quad \text{için} \quad t = 0$$

olacağından

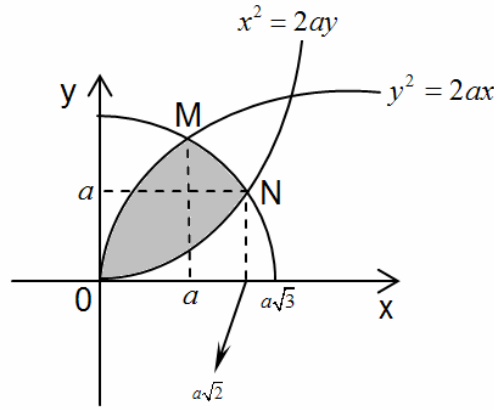
$$A = 4 \int_{\pi/2}^0 b |\sin t| (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \pi ab \quad br^2$$

bulunur.

3.1.4. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1) Birinci dörtte birde $x^2 + y^2 = 3a^2$ dairesinin iç kısmında bulunan ve $y^2 = 2ax$, $x^2 = 2ay$, ($a > 0$) parabolleri ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



Yukarıdaki grafikte boyalı olan $OMNO$ alanını hesap edeceğiz. Besbelli bu alan

$$S = \underbrace{\int_0^a \left(\sqrt{2ax} - \frac{x^2}{2a} \right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{3a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2a} \right) dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^a \left(\sqrt{2}x^{1/2} - \frac{1}{2a}x^2 \right) dx = \frac{2\sqrt{2}a}{3}a^{3/2} - \frac{a^3}{6a} = \frac{a^2}{6}(4\sqrt{2} - 1)$$

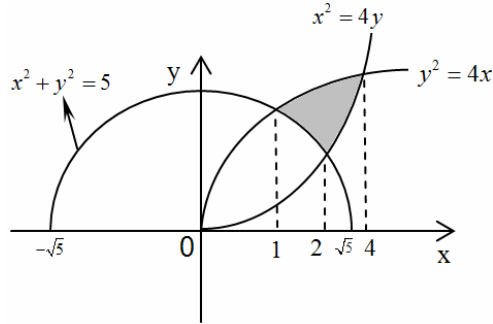
$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_a^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{3a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2a} \right) dx = \left(\frac{3a^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a\sqrt{3}} + \frac{x}{2} \sqrt{3a^2 - x^2} - \frac{x^3}{6a} \right) \Bigg|_a^{a\sqrt{2}} \\
&= \frac{3}{2} a^2 \left(\operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{2}{3}} - \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{a^2}{\sqrt{2}} - \frac{a^2}{\sqrt{2}} - \frac{a^2}{6} (2\sqrt{2} - 1) \\
S &= a^2 \left(\frac{3}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2) Birinci dördte birde bulunan $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ ve $x^2 + y^2 = 5$ eğrileri ile sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

Önce şekli çizelim ve dairenin, parabol kollarını kestiği noktaların koordinatlarını bulalım.



$x^2 + 4x = 5$ denkleminde, daire ile $y^2 = 4x$ parabolünün kesim noktasının koordinatları olarak $x = 1$, $y = 2$;

$y^2 + 4y = 5$ denklemini yardımıyla ise daire ile $x^2 = 4y$ parabolünün kesim noktasının koordinatları olarak $x = 2$, $y = 1$ bulunur. Şu halde aranan alan, paraboller $x = 4$ noktasında kesiştiklerinden

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx - \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx - \int_1^2 \left(\sqrt{5-x^2} - \frac{x^2}{4} \right) dx \\
&= \left(\frac{4}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^4 - \left(\frac{4}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^1 - \int_1^2 \sqrt{5-x^2} dx + \frac{x^3}{12} \Big|_1^2 \\
&= \frac{14}{3} - \int_1^2 \sqrt{5-x^2} dx
\end{aligned}$$

olup şimdi $I = \int_1^2 \sqrt{5-x^2} dx$ integralinde $x = \sqrt{5} \sin t$ koyalım. $dx = \sqrt{5} \cos t dt$

olup buradan,

$$\begin{aligned}
I &= \sqrt{5} \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos t dt = 5 \int \cos^2 t dt = \frac{5}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\
&= \frac{5}{2} t + \frac{5}{4} \cos 2t = \frac{5}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2} \frac{x}{\sqrt{5}} \sqrt{1-\frac{x^2}{5}}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$I = \int_1^2 \sqrt{5-x^2} dx = \left(\frac{5}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{x}{2} \sqrt{5-x^2} \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} \left(\operatorname{Arcsin} \frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

olup burada

$$\operatorname{Arcsin} \alpha - \operatorname{Arcsin} \beta = \operatorname{Arcsin} \left(\alpha \sqrt{1-\beta^2} - \beta \sqrt{1-\alpha^2} \right)$$

formülünden faydalanırsak

$$\operatorname{Arcsin} \frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{5}} = \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5}$$

olup alan hesabının sonucunun

$$A = \frac{14}{3} - \frac{5}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5}$$

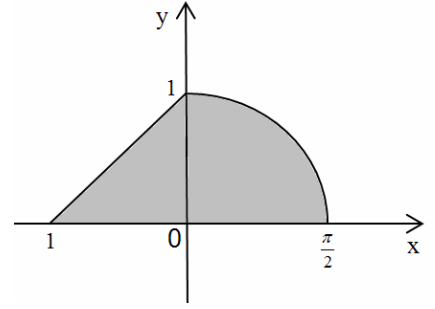
olduğu görülür.

3) $y = x+1$, $y = \cos x$ ve $0x$ -ekseni tarafından sınırlanan alanı bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \sin x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - 1 \right) + 1 = \frac{3}{2} \text{ br}^2$$



- 4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin birinci dörtte birde $OD = x$ apsisi üzerinde bulunan $ODNB$ bölgesinin alanını bulunuz.

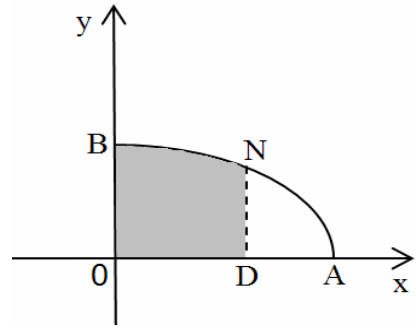
Çözüm:

$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ olduğundan aranılan alan

$$A = b \int_0^x \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} dt = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - t^2} dt$$

$$A = \frac{a \cdot b}{2} \text{Arc sin } \frac{x}{a} + \frac{xy}{2}$$

dir.



- 5) $y = x^3$ eğrisi ile $x = -1$, $x = 1$ doğruları ve x -ekseni tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

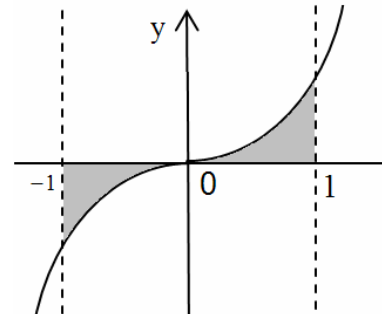
$$x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow x^3 < 0$$

dır. O halde

$$A = \int_{-1}^0 |x^3| dx + \int_0^1 x^3 dx = -\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 =$$

bulunur.

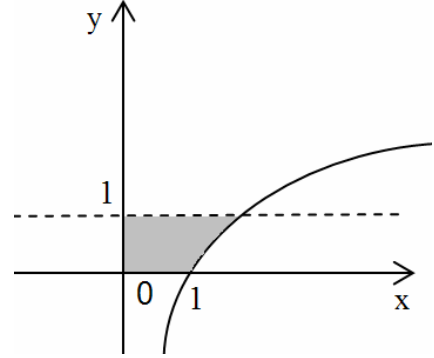


6) $y = \ln x$ eğrisi, $y = 0$, $y = 1$ doğruları ve y -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y$$

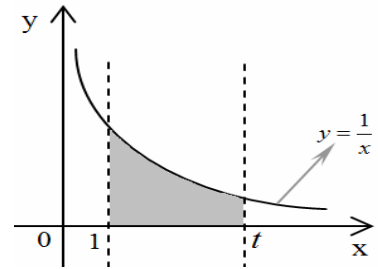
$$A = \int_0^1 |e^y| dy = \int_0^1 e^y dy = e^y \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \text{ br}^2$$



7) $y = \frac{1}{x}$ eğrisi $x = 1$ ve $x = t$ ($t > 1$) doğruları ile $0x$ -ekseni tarafından sınırlanan alanı hesap ediniz.

Çözüm:

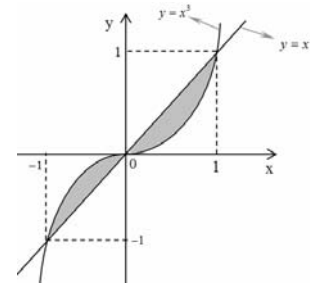
$$A = A(t) = \int_1^t \left| \frac{1}{x} \right| dx = \int_1^t \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_1^t = \ln t \text{ br}^2$$



8) $y = x^3$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x^3 - x) dx = \frac{1}{2} \text{ br}^2$$



UYARI:

Alanların simetrik oluşundan yararlanarak, söz konusu alan

$$A = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ br}^2 \text{ şeklinde de hesaplanabilir.}$$

9) $y = x^2$ parabolü, bu parabole (1,1) noktasından çizilen teğet doğru ve y -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

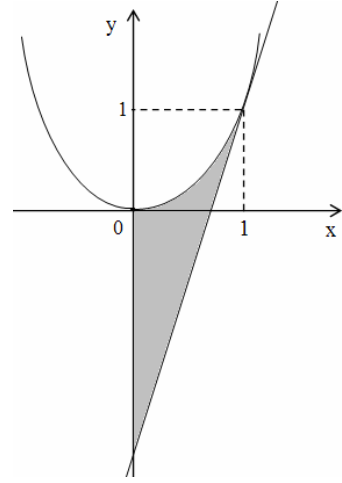
Önce $y = x^2$ eğrisine (1,1) noktasından çizilen teğet doğrunun denklemini buluruz.

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

formülünden

$$y - 1 = 2 \cdot 1 \cdot (x - 1)$$

bulunur. Şu halde problem $y = x^2$ parabolü, $y = 2x - 1$ doğrusu, $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulmaya indirgenir. Yandaki grafiğe göre



$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 |x^2 - (2x - 1)| dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ br}^2 \end{aligned}$$

10) $r = a(1 + \cos \alpha)$ kardioidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

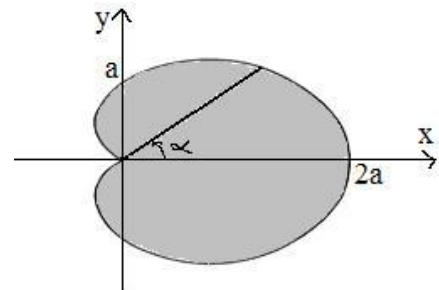
Çözüm:

Evvela bulunması istenen alanı grafikte gösterelim. Yandaki grafiğe göre,

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 d\alpha = \int_0^\pi a^2 (1 + \cos \alpha)^2 d\alpha$$

$$A = a^2 \int_0^\pi (1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha) d\alpha = \frac{3}{2} \pi a^2 \text{ br}^2$$

olur.



11) $r = 2$ çemberinin dışında, $r = 2(1 + \cos \varphi)$ kardioidinin içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

Yandaki grafiğe göre taralı alan $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındadır.

Bu aralıkta

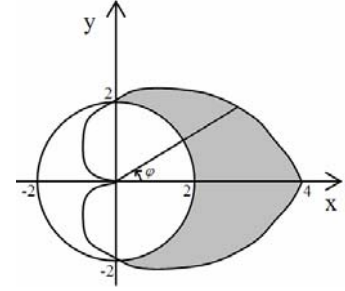
$$2(1 + \cos \varphi) \geq 2$$

olduğundan

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| 4 - 4(1 + \cos \varphi)^2 \right| d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(4(1 + \cos \varphi)^2 - 4 \right) d\varphi$$

$$A = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} (2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi$$

$$A = \pi + 8 \quad \text{br}^2$$



dir.

12) $y = 2 + x - x^2$ eğrisi ile $0x$ -ekseni tarafından sınırlanan alanı hesaplayınız.

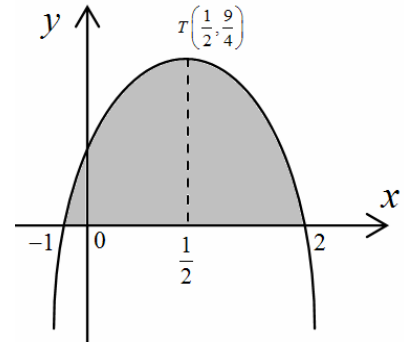
Çözüm:

Yandaki şekle göre,

$$A = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2$$

$$A = \frac{9}{2} \quad \text{br}^2$$

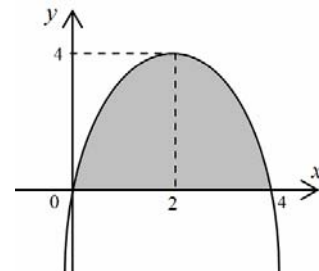
olur.



13) $y = 4x - x^2$ eğrisi ile $0x$ -ekseni arasında kalan alan kaç birim karedir?

Çözüm:

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \quad \text{br}^2$$



14) $y = \sin x$ eğrisi ile $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları ve $0x$ -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:

Yine her zaman yaptığımız gibi, önce grafiğini çizelim.

$$A = S_1 + S_2$$

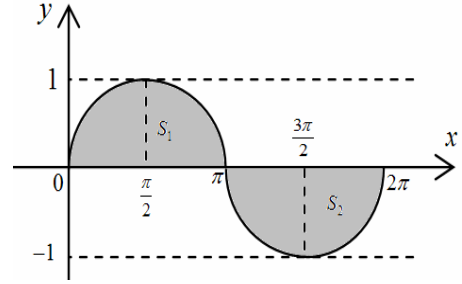
dir. Fakat S_1 negatif kısımda olduğundan integralin önüne $(-)$ işareti konulmalıdır. Aksi takdirde S_1 ve S_2 eşit olduklarından toplam sıfır olur. O halde

$$A = + \int_0^{\pi} (\sin x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx$$

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

$$A = 4 \text{ br}^2$$

olur.



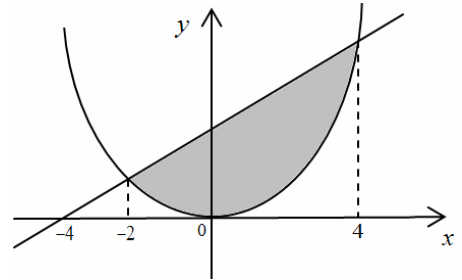
15) $y = \frac{x^2}{4}$ ile $y = \frac{x}{2} + 2$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

Eğri ile doğrunun kesişim noktalarını bulup grafiğini çizelim.

$$\frac{x^2}{4} = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 4$$

$$A = \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_{-2}^4 = 9 \text{ br}^2$$



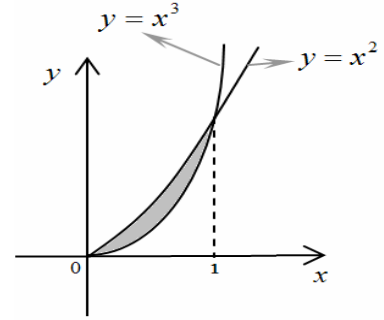
olur.

16) $y = x^3$ eğrisi ile $y = x^2$ eğrileri arasında kalan alanı hesap ediniz.

Çözüm:

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

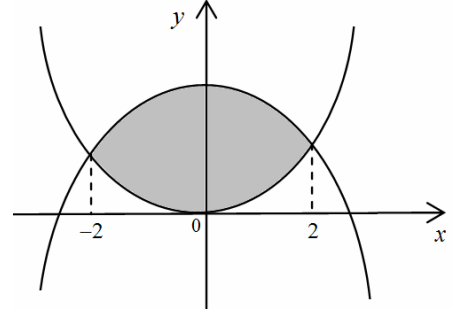


17) $y = \frac{x^2}{3}$ ve $y = 4 - \frac{2x^2}{3}$ parabolleri ile sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{x^2}{3} = 4 - \frac{2x^2}{3} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^2 \left(4 - \frac{2x^2}{3} - \frac{x^2}{3} \right) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3} \text{ br}^2$$

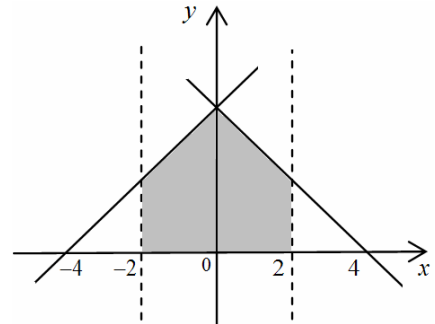


18) $y = 4 - |x|$ eğrisi, x -ekseni ve $x = -2$, $x = 2$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesap ediniz.

Çözüm:

$$y = 4 - |x| = \begin{cases} 4 - x & , x \geq 0 \\ 4 + x & , x < 0 \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^0 (4 + x) dx + \int_0^2 (4 - x) dx = 12 \text{ br}^2$$



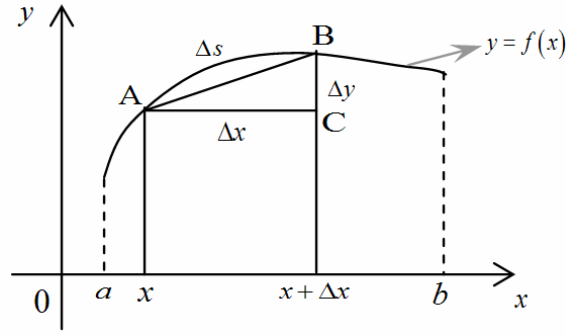
3.1.5. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER

- 1) $y = x(x-1)(x-2)$ eğrisi ile $0x$ - eksenini tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
- 2) $y^2 = 2x$ eğrisi ile $x - y = 4$ doğrusunun sınırladığı alanı hesaplayınız.
- 3) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ ve $x = 0$ arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.
- 4) $y^2 = 2x$ ve $x^2 = 2y$ arasında kalan alanı hesap ediniz.
- 5) $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri ile $x = \frac{\pi}{4}$ ve $x = \frac{5\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
- 6) $y = x^3 - x$ eğrisi ile bu eğriye $x = -1$ apsisli noktada teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.
- 7) $y = 6x - x^2$ eğrisi ile $y + x + 1 = 0$, $x = 1$, $x = 3$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.
- 8) $3x + 5y - 23 = 0$, $5x - 2y - 28 = 0$ ve $2x - 7y + 26 = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.
- 9) $y = e^{-x}$, $y = e^x$ eğrileri ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.
- 10) Birinci dörtte birde bulunan ve $y^2 = 4x$ parabolü ile $y = x - 1$ ve $x = 1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.
- 11) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ ve $y = x$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

3.2. Yay Uzunluğunun Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinat Sisteminde Yay Uzunluğunun Hesabı

$y = f(x)$ eşitliği ile verilen türevli f fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu eğrinin $x_1 = a$ ve $x_2 = b$ apsisli noktaları arasında bulunan parçasının uzunluğunu bulmak istiyoruz.



Şekil 3.7.

Δx küçük alındığında \widehat{AB} yayının Δs uzunluğu ile $[AB]$ doğru parçasının uzunluğu yaklaşık olarak eşittir. Buna göre,

$$\Delta s \cong \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

yazılabilir. Her iki taraf Δx ile bölünür ve $\Delta x \rightarrow 0$ için limit alınırsa,

$$S' = \sqrt{1 + (y')^2}$$

bulunur. Diferansiyel ve integral hesabın temel teoremi gereğince

$$S' = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

bulunur.

ÖRNEK 3.6.

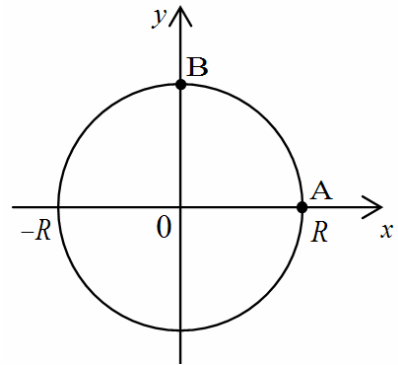
R yarıçaplı bir çemberin çevre uzunluğunu hesap ediniz.

Çözüm:

R yarıçaplı $x^2 + y^2 = R^2$ çemberini göz önüne alalım. Yandaki grafikten de görüldüğü gibi çemberine çevresi \widehat{AB} yayının dört katına eşittir. Buna göre

$$S = 4 \int_0^R \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

olacaktır.



$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow 2x + 2y y' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$S = 4 \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 4R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$S = 4R \cdot \text{Arc sin } \frac{x}{R} \Big|_0^R = 2\pi R \text{ br}$$

olur.

ÖRNEK 3.7.

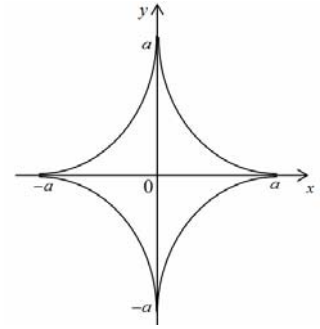
$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisinin çevre uzunluğunu hesap ediniz.

Çözüm:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\frac{x^{-1/3}}{(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}}$$

$$S = 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx$$

$$S = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = 4a^{1/3} \int_0^a x^{-1/3} dx = 4a^{1/3} \cdot \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_0^a = 6a \text{ br}$$



3.2.2. Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğunun Hesabı

Kartezyen koordinatlarda $y = f(x)$ denklemi ile verilen eğrinin yay diferansiyelinin

$$dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

olduğunu biliyoruz.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{dx}{d\varphi} = r' \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{d\varphi} = r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi$$

olduğundan

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = r^2 + (r')^2$$

dir. Buna göre, yay diferansiyeli

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

olur. O halde, eğri üzerinde noktalarını birleştiren yayın uzunluğu

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi \text{ dir.}$$

ÖRNEK 3.8.

R yarıçaplı bir çemberin çevre uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm:

R yarıçaplı çemberin kutupsal denklemi $r = R$ olduğundan

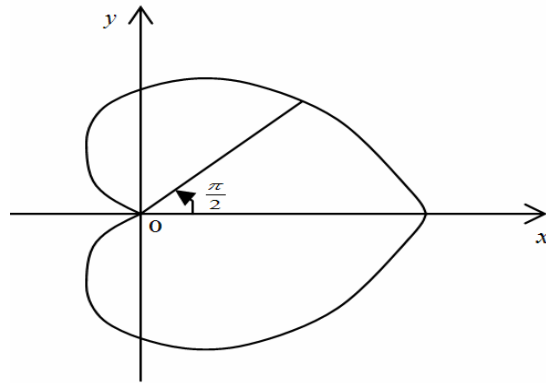
$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0} d\varphi = \int_0^{2\pi} R d\varphi = R \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R$$

dir.

ÖRNEK 3.9.

$r = a(1 + \cos \varphi)$ kardioidinin $\varphi_1 = 0$ ve $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ doğruları arasında kalan parçanın uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



$$r^2 = a^2 (1 + \cos \varphi)^2 = a^2 (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) \Rightarrow r' = a(-\sin \varphi) \Rightarrow (r')^2 = a^2 \sin^2 \varphi$$

olduğundan

$$S = \int_0^{\pi/3} \sqrt{a^2 (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/3} \sqrt{a^2 (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi$$

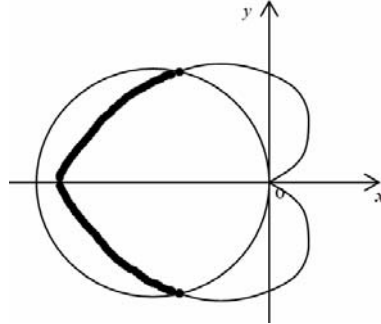
$$S = a \int_0^{\pi/3} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = a\sqrt{2} \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi = a\sqrt{2} \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1} d\varphi$$

$$S = 2a \int_0^{\pi/3} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi/3} = 2a \text{ br}$$

ÖRNEK 3.10.

$r = 2(1 - \cos \varphi)$ kardioidinin $r = -6 \cos \varphi$ dairesi içinde kala parçasının yayının uzunluğunu hesap ediniz.

Çözüm:



Önce bu iki eğrinin kesişim noktalarını bulalım.

$$2(1 - \cos \varphi) = -6 \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} \\ \varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

olur. Bu açılara karşılık gelen uzunluk $r = 3$ 'dür. O halde kesişim noktaları

$A\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$ ve $B\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$ noktalarıdır. Diğer taraftan

$$r^2 + (r')^2 = 4(1 + \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi) + 4 \sin^2 \varphi = 8(1 - \cos \varphi) = \left(4 \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2$$

olduğundan

$$S = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} 4 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8 \int_{2\pi/3}^{\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 16 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 8 \quad \text{br}$$

olur.

3.2.3. Eğri Denkleminin Parametrik Olarak Verilmesi Halinde Yay Uzunluğunun Hesabı

Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

olan bir C eğrisinin üzerindeki herhangi iki noktanın parametreleri t_1 ve t_2 olsun.

Bu iki noktayı birleştiren eğri parçasının uzunluğunu bulmak istiyoruz.

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$$

olduğundan C eğrisinin yay diferansiyeli

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

olur. Dolayısıyla

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

dir.

ÖRNEK 3.11.

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases}$$

denklemleri ile tanımlanan hiposikloid (astroid)'in çevre uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm:

$$x' = -3a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t$$

$$y' = 3a \cdot \sin^2 t \cdot \cos t$$

olduğundan

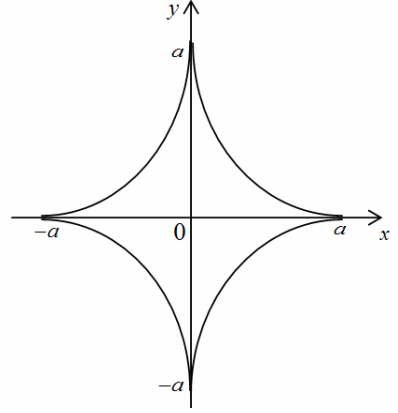
$$(x')^2 + (y')^2 = 9a^2 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^2 t$$

dir. O halde

$$S = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \cdot |\sin t \cdot \cos t| dt = 12a \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t dt$$

$$S = 6a \cdot \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = 6a \quad \text{br}^2$$

neticesi elde edilir.



3.2.4. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1) $f = \left\{ (x, y) \mid y = \log(\sin x), x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$ fonksiyonunun grafiğinin uzunluğunu

bulunuz.

Çözüm: $y' = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$S = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \log \left(\tan \frac{x}{2} \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\log \left(\tan \frac{\pi}{8} \right) = \log(\sqrt{2} + 1)$$

2) $f = \left\{ (x, y) \mid x = \frac{1}{2}(y+2)^{3/2}, y \in [2, 7] \right\}$ fonksiyonunun grafiğinin uzunluğunu

bulunuz.

Çözüm:

$[c, d]$ aralığında tanımlı $x = \varphi(y)$ fonksiyonu içinde, φ' türevi $[c, d]$ aralığında

sürekli olmak şartı ile, yay uzunluğu $S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} dy$ formülü ile hesap

edileceğinden,

$$S = \frac{1}{54} (97\sqrt{97} - 52\sqrt{52}) \quad \text{br}$$

bulunur.

3) Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = 2(1 - \cos t) \\ y = 2 \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

olan eğrinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

Bunun için $S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$ formülünü kullanalım.

$$S = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = 2t \Big|_0^{2\pi} = 4\pi \text{ br}$$

dir.

4) Denklemi $y^2 = 16x$ olan parabolün $x = 0$ ile $x = 4$ doğruları arasında bulunan yayın uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

$$y^2 = 16x \Rightarrow y = 4\sqrt{x}$$

olup y' türevi $[0, 4]$ aralığında sürekli olmadığından eğrinin denklemini parametrik olarak

$$x = t^2, \quad y = 4t, \quad t \in [0, 2]$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$S = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 16} dt = 2 \int_0^2 \sqrt{t^2 + 4} dt = 4 \left(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right)$$

olup aranan uzunluk bunun iki katıdır, yani

$$2S = 8 \left[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right] \text{ br}$$

dir.

5) $y^2 = x^3$ semikübik parabolünün $x = 0$ ile $x = 4$ doğruları arasındaki yayın uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

Eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^{3/2} \\ t \in [0, 4] \end{cases}$$

olduğundan

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{9t + 4} dt = \frac{2}{27} (9t + 4)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

sonucu elde edilir.

3.2.5. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER

1) Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t^3 \\ t \in [0, \sqrt{5}] \end{cases}$$

olan eğrinin uzunluğunu hesap ediniz.

2) Parametrik gösterimi

$$\begin{cases} x = e^t \cdot \sin t \\ y = e^3 \cdot \cos t \\ t \in [0, 2] \end{cases}$$

olan eğrinin uzunluğunu bulunuz.

3) $y = 2\sqrt{x}$ parabolünün $x = 0$ ve $x = 1$ arasındaki yay uzunluğunu bulunuz.

4) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\log y$ eğrisinin $y = 1$ ve $y = e$ arasındaki yay uzunluğunu hesap ediniz.

5) $y = \log x$ eğrisinin $x = \sqrt{3}$ ile $x = \sqrt{8}$ arasındaki yayın uzunluğunu bulunuz.

6) $y = e^x$ eğrisinin $(0, 1)$ noktası ile $(1, e)$ noktası arasındaki yay uzunluğunu hesaplayınız.

7) Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

olan eğrinin uzunluğu kaç br.'dir?

8) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ eğrisinin $x = 0$ ve $x = 3$ doğruları arasındaki yayın

uzunluğunu hesaplayınız.

9) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ eğrisinin $x = 0$ ve $x = 8$ doğruları arasındaki yayın uzunluğu kaç br.'dir?

10) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$ eğrisinin $x = 1$ ve $x = 4$ doğruları arasında kalan yayın

uzunluğu kaç br.'dir?

11) $r = 4 \cos \varphi$ eğrisinin $\varphi \in [0, \pi]$ arasındaki yay uzunluğunu hesaplayınız.

12) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ eğrisinin $0 \leq \varphi \leq 3\pi$ aralığındaki yay uzunluğunu hesaplayınız.

13) $r = \frac{3}{\cos \varphi}$ eğrisinin $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ aralığındaki yay uzunluğunu hesaplayınız.

14) $r = a.e^\varphi$ logaritmik spiralinin $r = 2a$ çemberi içinde kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

3.3. Kiriş Uzunluğunun Eğri Parçasına Oranı

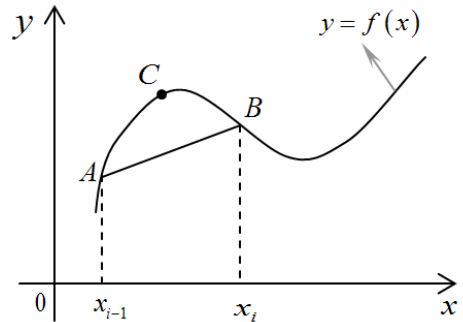
y' türevi sürekli olan bir $y = f(x)$ eğrisi düşünelim. Bu eğri üzerinde bir kiriş uzunluğunun buna karşılık gelen eğri parçası uzunluğuna oranının, eğri parçası uzunluğu sıfıra yaklaştığı zaman, limitini arayalım.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ olmak üzere,

AB kirişinin uzunluğu $= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

ACB eğri parçasının uzunluğu $=$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{1 + (f')^2} dx$$



dir. Bu ise integral hesabının birinci ortalama değ er teoremi gereğince

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{1+(f')^2} dx = \Delta x_i \sqrt{1+[f'(\xi)]^2} \quad , \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i)$$

dir. řu halde aranılan oranı λ ile gösterirsek

$$\lambda = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{|AB|}{S} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i \sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\Delta x_i \sqrt{1+[f'(\xi)]^2}} = 1$$

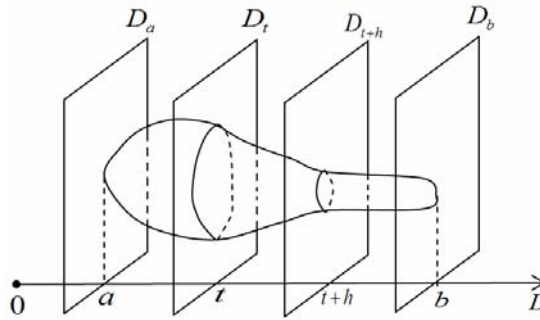
$\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ ve $x \in [x_{i-1}, x_i]$ olur.       f' sürekli bir fonksiyon olarak alınmıştır.

3.4. Hacim Hesapları

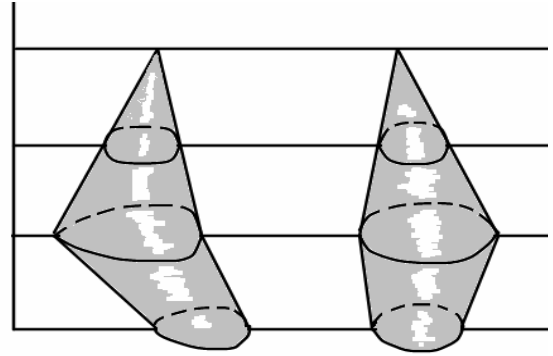
3.4.1. Kesit Metodu

Bir B cismi ile bir L doğrusu verilmiş olsun. Doğru üzerinde bir 0 başlangıç nokatsı alalım (Bkz. şekil 3.9.). L doğrusunu t noktasında dik kesen düzleme D_t ; D_t ile B cisminin arakesitinin alanını $A(t)$ ile gösterelim.

$A:t \rightarrow A(t)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olduğunu kabul edelim.



şekil 3.9.



şekil 3.10.

B cismi, $a < b$ olmak üzere, D_a ile D_b düzlemleri arasında bulunsun. D_a ile D_t düzlemleri arasında kalan cismin hacmini $V(t)$ ile gösterirsek

$$V(a) = 0 \quad \text{ve} \quad V(b) = V$$

yani istenen tüm hacimdir.

$V(t+h)-V(t)$ farkı, yaklaşık olarak, yüksekliği h , taban alanı $A(t)$ olan dik silindirin hacmine eşit olur. Şu halde

$$V(t+h)-V(t) \cong h \cdot A(t)$$

buradan da

$$\frac{V(t+h)-V(t)}{h} \cong A(t)$$

yazılabilir. Buna göre

$$V'(t) = A(t)$$

yazılabilir. İntegral hesabının temel teoreminden

$$V(x) = \int_a^x A(t) dt$$

elde edilir. $V(b) = V$ olduğundan

$$V = \int_a^b A(t) dt$$

bulunur.

Yukarıdaki incelemelerden şu gerçek elde edilmektedir: “Eğer iki cismin bir doğruya dik olan düzelemler ile elde edilen kesitleri eşit alan sahip iseler, bu iki cisim eşit hacimlidir.” Bu gerçek **Cavalieri Prensibi** olarak bilinmektedir.

ÖRNEK 3.12.

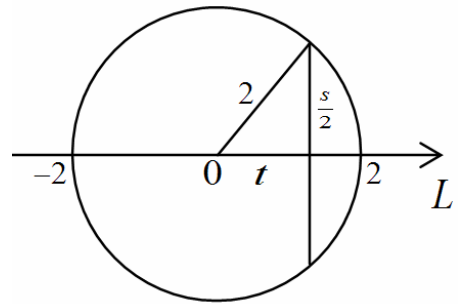
Bir cismin tabanı, yarıçapı 2 cm olan bir dairedir. Cismin tabana dik düzlemler ile arakesiti karelerdir. Bu cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

Çemberin merkezinden geçen doğruyu L olarak alalım. Çemberin merkezinden t kadar uzaktaki kenar uzunluğuna s dersek,

$$t^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow s^2 = 16 - 4t^2$$

olur.



Kesitin alanı

$$A(t) = 16 - 4t^2$$

olacağından

$$V = \int_{-2}^2 A(t) dt = \int_{-2}^2 (16 - 4t^2) dt = \frac{128}{3} \text{ br}^3$$

bulunur.

ÖRNEK 3.13.

Bir cismin $0x$ -eksenine dik düzlemler ile arakesiti, uzun eksen kısa ekseninin iki katı olan eşit olan bir elipstir. Bir cisim xOy düzlemine paralel kesildiğinde elde edilen en geniş kesitin üst sınırı $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$ parabolüdür. Bu cismin uzunluğunun 3 br olduğu bilindiğine göre, hacmi nedir?

Çözüm:

Eksen uzunlukları $2a$ ve $2b$ olan elipsin alanı πab 'dir.

Buna göre $0x$ -eksenine göre x apsisli noktadan çizilen dik düzlemin cisim ile arakesiti olan elipsin

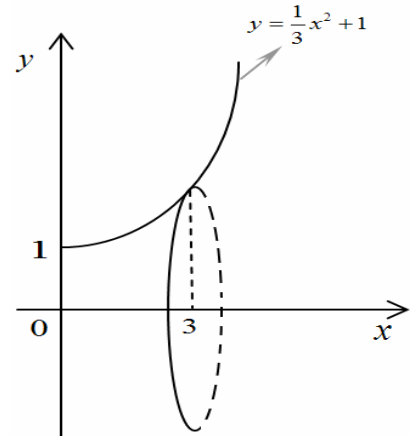
eksen uzunlukları $\frac{y}{2}$ ve y 'dir. Buna göre

$$A(x) = \pi y \cdot \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} y^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right)^2$$

dir. Şu halde

$$V = \int_0^3 A(x) dx = \int_0^3 \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) dx = \frac{36}{5} \pi \text{ br}^3$$

olur.

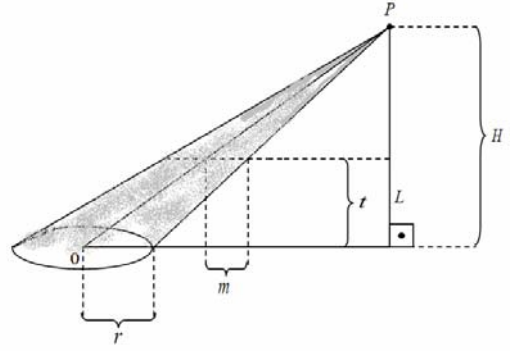


ÖRNEK 3.14.

Tepe noktasının taban düzlemine olan uzaklığı H br. olan bir dairesel koni veriliyor. Taban yarıçapı r olduğuna göre bu koninin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

P tepe noktasından taban düzlemine indirilen dikmeye L diyelim. Tabandan t kadar yükseklikten L 'ye dik çizilen düzlemin koni ile arakesiti yine bir dairedir. Dairenin yarıçapına m dersek, benzer üçgenlerden



$$\frac{m}{r} = \frac{H-t}{H} \Rightarrow m = r \left(1 - \frac{t}{H} \right)$$

olur. Böylece kesitin alanı

$$A(t) = \pi m^2 = \pi r^2 \left(1 - \frac{t}{H} \right)^2$$

ve dolayısıyla koninin hacmi

$$V = \int_0^H \pi r^2 \left(1 - \frac{t}{H} \right)^2 dt = \frac{1}{3} \pi r^2 H \quad \text{br}^3$$

olur. Şu halde bir koninin hacmi, tabanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir.

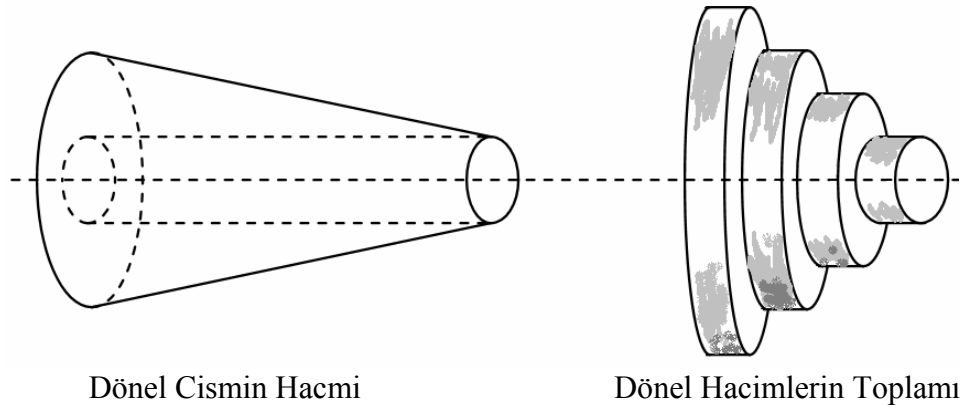
Dönel cisimlerin hacimlerini hesaplamada belli başlı iki metot vardır:

- a) Disk Metodu,
- b) Kabuk Metodu.

Şimdi bu metotları verelim. $[a, b]$ aralığında f fonksiyonu pozitif ve integralenebilir olsun.

3.4.1.a. Disk Metodu

$[a, b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ noktaları yardımıyla n parçaya bölelim. Her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında ξ_k noktası seçelim. Yarıçapları $f(\xi_k)$, yükseklikleri Δx_k olan disklerin (silindirlerin) hacimleri toplamı, yaklaşık olarak, dönel cismin hacmine eşittir.



Şekil 3.11.

Parçalanma ne kadar ince olursa yaklaşım o kadar iyi olur. O halde

$$V = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \pi \cdot f^2(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

yazabiliriz. f integrallenebilir olduğundan f^2 de integrallenebilir. Şu halde sağ taraftaki limit πf^2 fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki integralidir. Buna göre hacim formülü

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

olur.

$y = f(x)$ eğrisi $x = a$, $x = b$ ve $y = k$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölge $y = k$ doğrusunun bir tarafında kalsın. Bu bölge $y = k$ doğrusu etrafında döndürülürse meydana gelen dönel cismin hacmi, $y = f(x) - k$ eğrisinin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmine eşit olacağından

$$V = \pi \int_a^b |f(x) - k|^2 dx$$

olur.

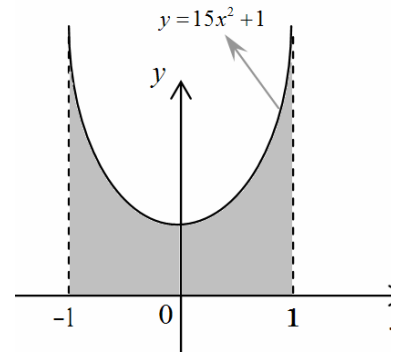
Benzer şekilde, $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile $0y$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi

Çözüm:

$$V = \pi \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^1 (15x^2 + 1)^2 dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (15x^2 + 1)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (225x^4 + 30x^2 + 1) dx = 112$$

olacaktır.



ÖRNEK 3.16.

$0 < a < b$ olsun. Merkezi $(0, b)$ noktasında bulunan a yarıçaplı bir çember tarafından sınırlanan bölgenin $0x$ – eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin (torun) hacmini bulunuz.

Çözüm:

Verilen çemberin denklemi:
 $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ dir. Bu eşitlikten y çekilirse

$$y_1 = f(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y_2 = g(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$$

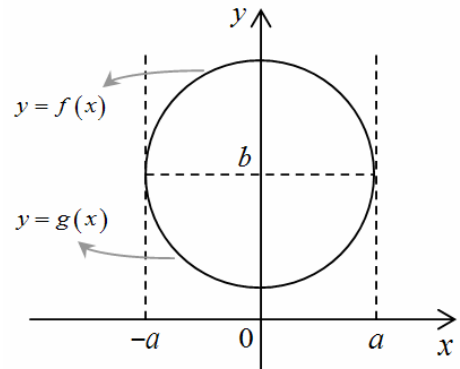
bulunur. Söz konusu bölge grafikte yanda gösterilmiştir. Buna göre istenen hacim

$$V = \pi \int_{-a}^a \left[\left(b + \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \right] dx$$

$$V = 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$V = 2\pi^2 a^2 b \text{ br}^3$$

olur.

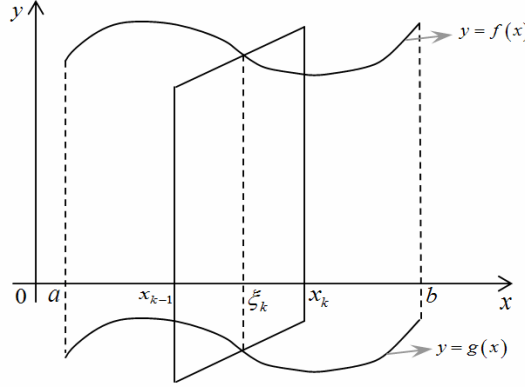


Şekil 3.13.

3.4.1.b. Kabuk Metodu

$y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $0y$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulalım. (Bkz. Şekil 3.13)

$[a, b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ olsun. Her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında ξ_k seçelim. Boyu $|f(\xi_k) - g(\xi_k)|$, eni Δx_k olan dikdörtgenin Oy -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen silindirik tabakanın hacmi



Şekil 3.14.

$$\Delta V_k = |\pi x_k^2 - \pi x_{k-1}^2| \cdot |f(\xi_k) - g(\xi_k)| = 2\pi \left| \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right| \cdot |f(\xi_k) - g(\xi_k)| \cdot \Delta x_k$$

olur. İstenen V hacmi, yaklaşık olarak, bu ΔV_k hacimlerinin toplamına eşittir. Buna göre

$$V \cong 2\pi \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right| \cdot |f(\xi_k) - g(\xi_k)| \cdot \Delta x_k$$

olur. Parçalanma ne kadar ince alınırsa yaklaşıklık o kadar iyi olur. $\|P\| \rightarrow 0$

yapılırsa, $\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \cong \xi_k$ olacağından

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=1}^n |\xi_k| \cdot |f(\xi_k) - g(\xi_k)| \cdot \Delta x_k$$

bulunur. Eğer $f - g$ integrallenebilir ise sağ taraftaki limit

$$2\pi \int_a^b |x| \cdot [f(x) - g(x)] dx$$

integraline eşit olacağından

$$V = 2\pi \int_a^b |x| \cdot [f(x) - g(x)] dx$$

bulunur.

Benzer olarak $x = u(y)$, $x = v(y)$ eğrileri, $y = c$ ve $y = d$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_c^d y \cdot [u(y) - v(y)] dy$$

olur.

ÖRNEK 3.17.

$y = x^2$ ile $y^2 = x$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin $0y$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

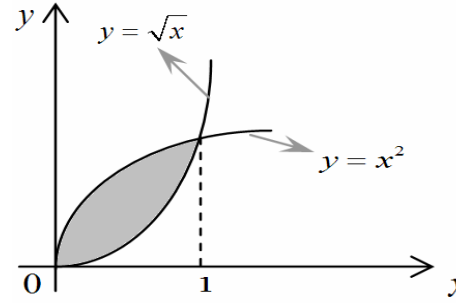
Üstteki eğrinin denklemi: $y = \sqrt{x}$

Alttaki eğrinin denklemi: $y = x^2$

olduğundan

$$V = 2\pi \int_0^1 x |\sqrt{x} - x^2| dx = 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx = \frac{3\pi}{10} \quad b$$

bulunur.

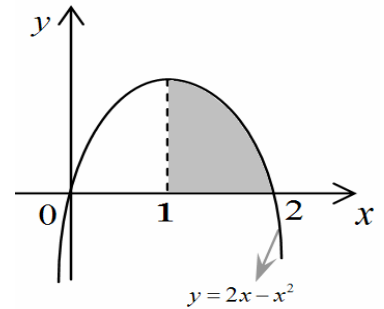


ÖRNEK 3.18.

$y = 2x - x^2$ parabolü ile $0x$ -ekseni ve $x = 1$ ve $x = 2$ doğruları tarafından sınırlanan düzlem parçasının $0y$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = 2\pi \int_1^2 x |2x - x^2| dx = 2\pi \int_1^2 (2x^2 - x^3) dx = \frac{11}{6} \pi \quad br^3$$

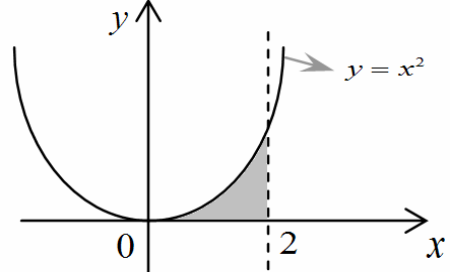


3.4.2. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ arasında kalan bölgenin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

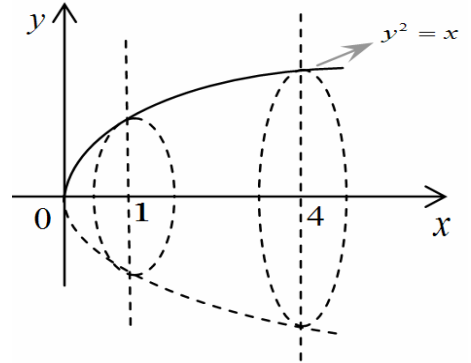
$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32}{5} \pi \text{ br}^3$$



2) Birinci dörtte birde $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 1$ ve $x = 4$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölge x eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 x dx = \frac{15}{2} \pi \text{ br}^3$$



3) $3x + 2y = 12$, $x = 0$, $y = 0$ fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlanan alan

a) x eksenini etrafında,

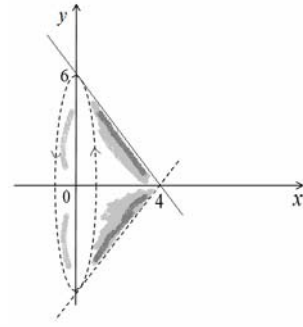
b) y eksenini etrafında,

döndürülüyor. Meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini integral yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm:

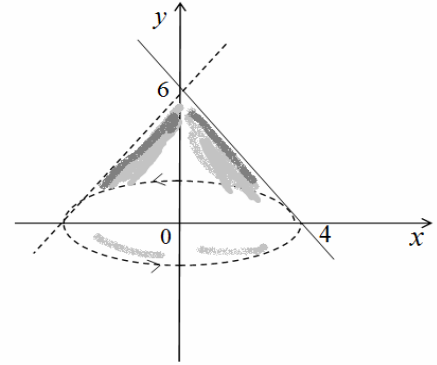
a)

$$y = 6 - \frac{3}{2}x \Rightarrow V_1 = \pi \int_0^4 \left(6 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx = 48\pi \quad \text{br}$$



b)

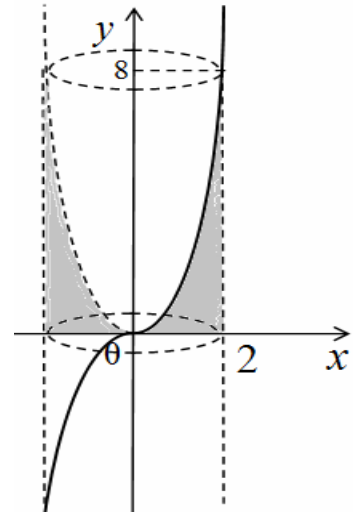
$$x = 4 - \frac{2}{3}y \Rightarrow V_2 = \pi \int_0^6 \left(4 - \frac{2}{3}y\right)^2 dy = 32\pi \quad \text{b}$$



4) $y = x^3$, $y = 0$ ve $x = 2$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölge y ekseninde döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \pi \int_0^8 x^2 dy = \pi \int_0^8 y^{2/3} dy = \frac{96}{5} \pi \quad \text{br}^3$$



5) $y = 6x - x^2$ ve $y = 0$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan bölge $0y$ - ekseninde döndürülüyor. Bu dönel cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

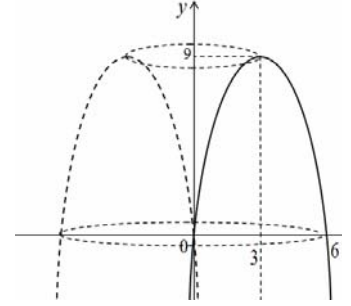
$y = 6x - x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. Aranılan bölge y eksenini etrafında döndürüleceğinden, dolayısı, bize verilen bağıntıdan x 'i çekmeliyiz. O halde

$$x^2 - 6x + y = 0 \Rightarrow x = 3 \mp \sqrt{9 - y}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{9 - y}, \quad x_2 = 3 - \sqrt{9 - y}$$

yazılabileceğinden, söz konusu bölgenin y eksenini etrafında döndürülmesinden meydana gelen cismin hacmi

$$V = \pi \int_0^9 \left[(3 + \sqrt{9 - y})^2 - (3 - \sqrt{9 - y})^2 \right] dy = 12\pi \int_0^9 \sqrt{9 - y} dy =$$

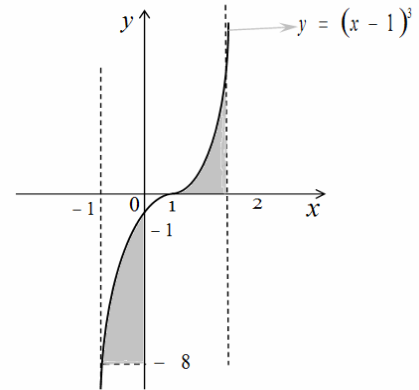


dir.

6) $y = (x - 1)^3$ fonksiyonunun grafiği ile $y = 0$, $x = -1$ ve $x = 2$ doğruları tarafından sınırlanan bölge x eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \pi \int_{-1}^2 y^2 dx = \pi \int_{-1}^2 [(x - 1)^3]^2 dx = \frac{129}{7} \pi \text{ br}^3$$



7) Köşegenlerinin koordinatları $A(1,2)$, $B(4,5)$, $C(9,0)$ olan bir üçgen x eksenini etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$[AB]'nin\ denklemi: y = x + 1$$

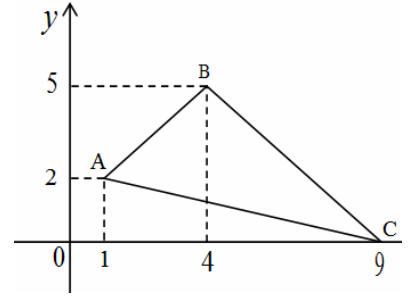
$$[BC]'nin\ denklemi: y = -x + 9$$

$$[CA]'nin\ denklemi: y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{4}$$

dir. Buna göre aranılan hacim,

$$V = \pi \int_1^4 \left[(x+1)^2 - \left(-\frac{x}{4} + \frac{9}{4} \right)^2 \right] dx + \pi \int_4^9 \left[(-x+9)^2 - \left(-\frac{x}{4} + \frac{9}{4} \right)^2 \right] dx$$

$$V = 70\pi \quad br^3$$



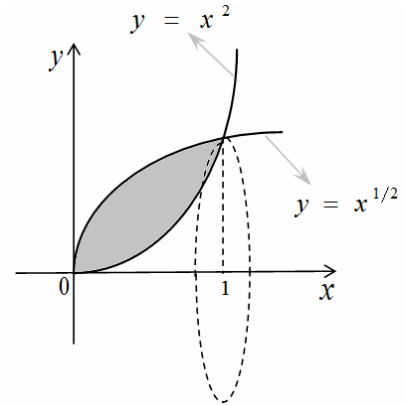
olur.

8) $y = x^2$ ve $y = x^{1/2}$ parabolleri arasındaki bölge $0x$ -ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 \left[(x^{1/2})^2 - (x^2)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{10} \pi \quad br^3$$



9) $y = x^2 + 2$ ile $y = -x^2 + 10$ fonksiyonları ile sınırlanan bölge $0x$ -ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

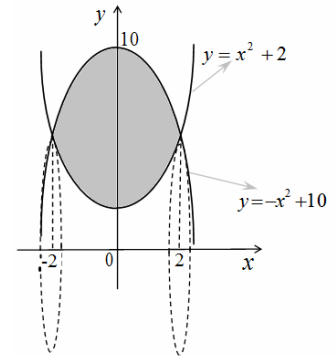
Çözüm:

$$x^2 + 2 = -x^2 + 10 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

$$V = \pi \int_{-2}^2 \left[(-x^2 + 10)^2 - (x^2 + 2)^2 \right] dx$$

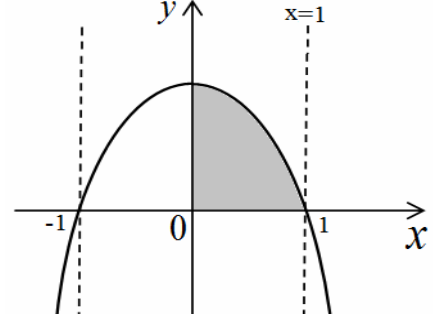
$$V = 2\pi \int_0^2 24(4 - x^2) dx = 48\pi \int_0^2 (4 - x^2) dx = 256\pi \quad br^3$$



10) $y = 1 - x^2$, $x = 0$ ve $x = 1$ fonksiyonları ile sınırlanan bölgenin Oy -ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 (1 - y) dy = \frac{\pi}{2} br^3$$



11) Bir düzgün piramidin yüksekliği 100 cm 'dir. Bu piramidin tabanının bir kenarının uzunluğu 100 cm olan bir karedir. Bu piramidin her cm^3 'nün ağırlığı 3 g 'dır. Buna göre bu piramidin ağırlığı kaç kg 'dır?

Çözüm:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) dt$$

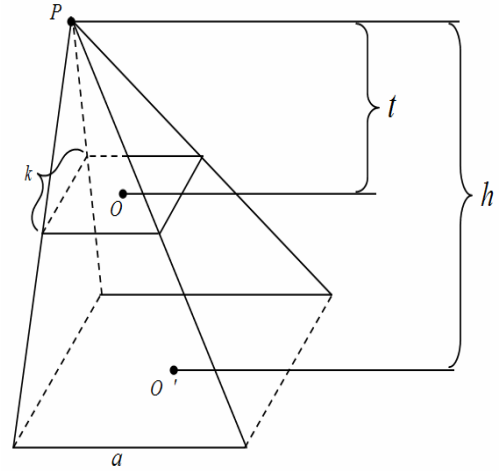
formülü, düzlem kesitinin alanı bilinmesi halinde, hacmin hesaplanabileceğini açıklar. Örneğin, dik ve kare tabanlı bir piramit verilmiş olsun ve Ot -ekseni piramidin tepesinden tabana doğru yönelmiş olarakseöilmiş olsun. Piramidin yüksekliği h , tabanının kenar uzunluğu a ise, tepeden t uzaklığında bulunan bir düzlem ile elde edilen kesitin k kenar uzunluğu için yani düzleme ait kenar uzunluğunun düzleme ait yüksekliğe oranları eşittir. O halde

$$\frac{k}{t} = \frac{a}{h} \Rightarrow k = \frac{a}{h} \cdot t$$

elde edilir ve

$$A(t) = k^2 \Rightarrow A(t) = \frac{a^2}{h^2} \cdot t^2$$

dir. Şu halde



$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{h^2} \cdot t^2 dt = \frac{a^2}{h^2} \int_0^h t^2 dt = \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} a^2 h$$

dir. Buradan $a = 100 \text{ cm}$ ve $h = 100 \text{ cm}$ olduğundan piramidin hacmi

$$V = \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{3} \cdot (100)^2 \cdot 100 = \frac{1000000}{3} \text{ cm}^3$$

olur. Bu piramidin her bir cm^3 'ünün ağırlığı 3 g olduğuna göre bu piramidin ağırlığı: 1000000 g 'dir. Yani 1000 kg 'dir.

12) Bir cismin tabanının eksen uzunlukları 10 cm ve 8 cm olan bir elipstir. Bu cismin büyük eksen dik düzlemlerle arakesiti yüksekliği 6 cm olan birer ikizkenar üçgendir. Bu cismin hacmini bulunuz.

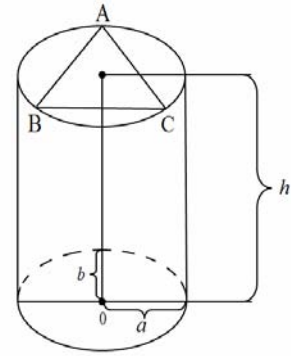
Çözüm:

ABC ikizkenar üçgen olduğundan $|AB| = |BC|$ 'dir.

$a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$ 'dir. Bu cismin taban alanı:

$$A = \frac{\pi a b}{2} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 4}{2} = 10\pi \text{ cm}^2$$

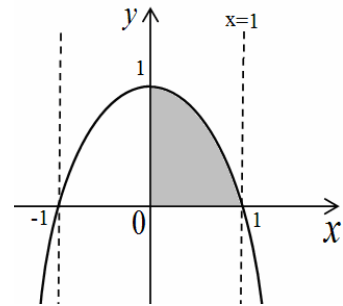
$$V = A \cdot h = 10\pi \cdot 6 = 60\pi \text{ cm}^3$$



13) $y = 1 - x^2$ eğrisi ile $x = 0$, $x = 1$ ve $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

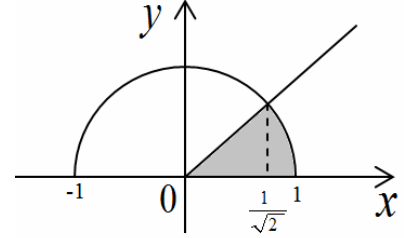
$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 (1 - x)^2 dx = \frac{8}{15} \pi \text{ br}^3$$



14) $y = \sqrt{1-x^2}$ eğrisi ile $y = x$, $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $0x$ – eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:

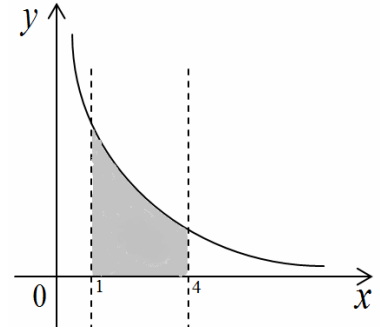
$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^2 dx = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-x^2) dx = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \quad br^3$$



15) $x.y = 4$ eğrisi ile $x = 1$, $x = 4$ ve $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $0x$ – eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = 12\pi \quad br^3$$

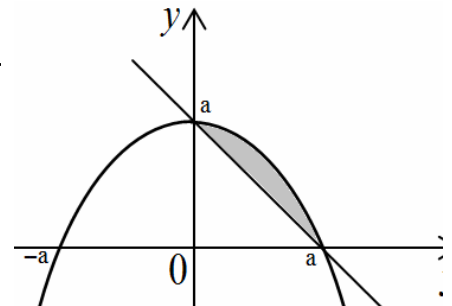


16) $y = a - \frac{x^2}{a}$ eğrisi ile $x + y = a$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin $0y$ – eksenini etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \pi \int_0^a x^2 dy = \pi \int_0^a [(a^2 - ay) - (a - y)^2] dy = \pi \int_0^a (ay -$$

$$V = \frac{\pi}{6} a^3 \quad br^3$$

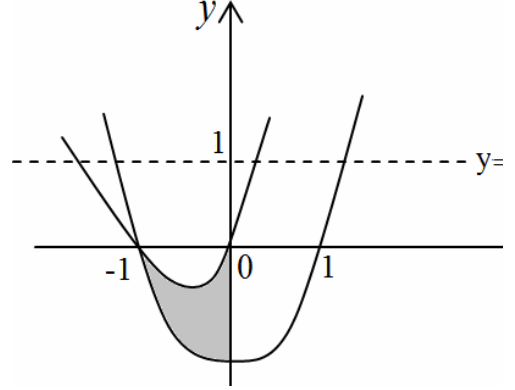


17) $y = x + x^2$ ve $y = x^2 - 1$ eğrileri ile $x = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \pi \int_{-1}^0 |f(x) - k|^2 dx = \pi \int_{-1}^0 [(x + x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)^2]$$

$$V = \pi \int_{-1}^0 (2x^3 + 3x^2 - 2x - 3) dx = \frac{3\pi}{2} \text{ br}^3$$

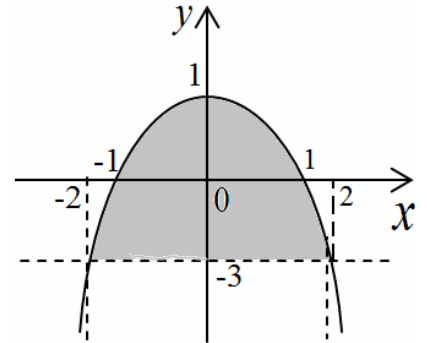


18) $y = 1 - x^2$ eğrisi ile $y = -3$ doğrusu arasında kalan bölgenin $y = -3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$y = -3 \Rightarrow -3 = 1 - x^2 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$V = \pi \int_{-2}^2 [1 - x^2 - (-3)]^2 dx = 2\pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \frac{512}{15} \pi$$



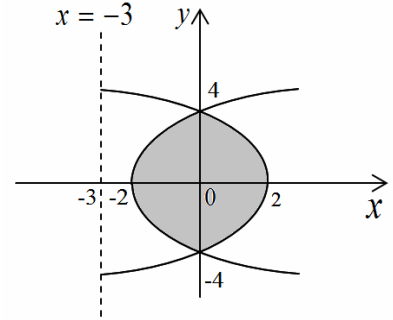
19) $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin $x = -3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

Çözüm:

$$V = \pi \int_{-4}^4 (x+3)^2 dy = 2\pi \int_0^4 (x+3)^2 dy$$

$$V = 2\pi \int_0^4 \left[\left(-\frac{y^2}{2} + 2 + 3 \right)^2 - \left(\frac{y^2}{2} - 2 + 3 \right)^2 \right] dy$$

$$V = 12\pi \int_0^4 (y^2 - 4) dy = 64\pi \quad br^3$$



20) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

Sikloidinin bir yayı ile 0x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin 0x-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$dx = a(1 - \cos t) dt$$

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a \cdot (1 - \cos t) dt$$

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t + \cos^2 t - \cos^3 t) dt$$

$$V = 5\pi^2 \cdot a^3 \quad br^3$$

21) $y = 6 - x$ doğrusu ile $xy = 5$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin 0y-ekseni etrafında dönüdüğüyle oluşan cismin hacmini

a) Disk metodu ile

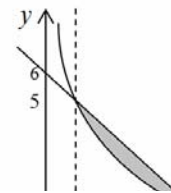
b) Kabuk metodu ile

hesaplayınız.

Çözüm:

a) $V = \pi \int_1^5 x^2 dy = \pi \int_1^5 \left[(6-y)^2 - \left(\frac{5}{y} \right)^2 \right] dy$

$$V = \frac{64}{3} \pi \quad br^3$$



$$b) \quad V = 2\pi \int_1^5 y \left[g(y) - h(y) \right] dy = 2\pi \int_1^5 y \left(6 - y - \frac{5}{y} \right) dy$$

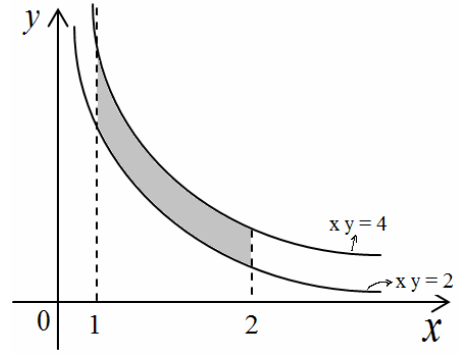
$$V = 2\pi \int_1^5 (6y - y^2 - 5) dy = \frac{64}{3} \pi \quad br^3$$

22) $xy = 2$, $xy = 4$ eğrileri ile $x = 1$, $x = 2$ doğruları arasında kalan bölgenin Oy -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

$$V = 2\pi \int_1^2 y \left| \frac{4}{y} - \frac{2}{y} \right| dy = 2\pi \int_1^2 2 dy = 4\pi y \Big|_1^2$$

$$V = 4\pi \quad br^3$$



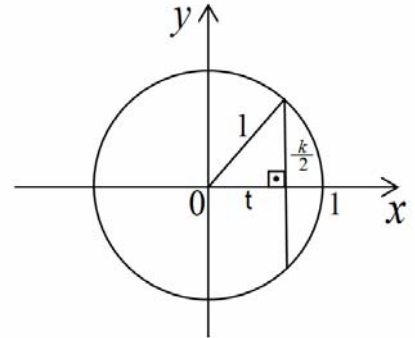
23) Bir cismin tabanı $x^2 + y^2 \leq 1$ dairesidir. Bu cismin Ox -eksenine dik düzlemlerle arakesiti karelerdir. Bu cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$\left(\frac{k}{2} \right)^2 + t^2 = 1 \Rightarrow k^2 = 4 - 4t^2$$

$$A(t) = k^2 = 4 - 4t^2$$

$$V = \int_{-1}^1 A(t) dt = \int_{-1}^1 (4 - 4t^2) dt = \frac{16}{3} \quad br^3$$



3.4.3. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER

- 1) $y = x^3$ eğrisi ile $x = 1$, $x = 2$ ve $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.
- 2) $y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $x = 0$ ve $y = 1$ doğruları tarafından sınırlanan bölge Ox -ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

3) $y = 3x - x^2$ parabolü ile $y = x$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

4) $y^2 = 2px$ eğrisi ile $x = h$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

5) $(y - a)^2 = ax$ eğrisi ile $x = 0$ ve $y = 2a$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

6) Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgenin $0y$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cisimlerin hacmini bulunuz.

a) $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

7) Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgenin karşılarında yazılı eksenler etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

a) $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$ Eksen: $y = 2$

b) $y = 4x - x^2$, $y = 0$ Eksen: $y = 4$

c) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$ Eksen: $x = -1$

8) $y = x^2 + 1$ eğrisiyle bu eğriye $x = 1$ noktasından çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin;

a) $0x$ -ekseni,

b) $0y$ -ekseni,

etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

9) $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ eğrileri $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

10) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin $0x$ -ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

11) Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgenin $0y$ -ekseni etrafında dönmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

a) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

b) $y = \frac{\sin x}{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

c) $y = 4x - x^2$, $y = 0$

ç) $4y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

12) $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri ile $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ doğruları tarafından

sınırlanan bölgenin $0x$ ve $0y$ eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan cisimlerin hacimlerini bulunuz.

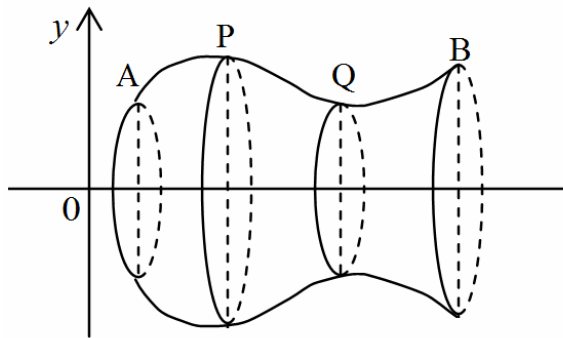
13) $r = a(1 - \cos \varphi)$ kardioidinin kutupsal eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

3.5. Dönel Yüzeylerin Alanlarının Hesapları

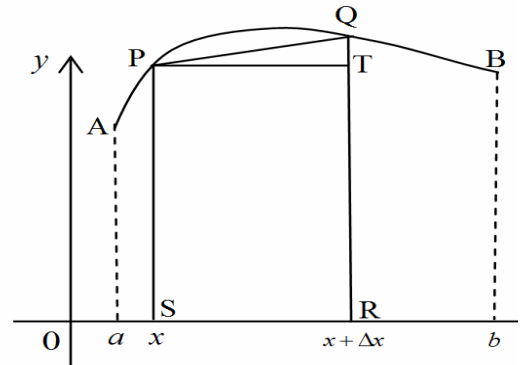
Bilindiği gibi bir eğri parçası bir etrafında döndürüldüğü zaman dönel yüzey denilen yüzeyler elde edilir. Bu kesimde bu tip yüzeylerin alanlarını hesaplayacağız.

3.5.1. Eğri Denkleminin Kartezyen Formda Verilmesi Halinde Dönel Yüzeyin Alanının Hesabı

$y = f(x)$ eşitliği ile verilen $[a, b]$ aralığına karşılık gelen AB eğri parçasının $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin alanını hesaplayalım.



Şekil 3.15.



Şekil 3.16.

$[a, b]$ aralığında bir $S(x, 0)$ noktası ile $R(x + \Delta x, 0)$ noktasını alalım.

Eğrinin $P(x, f(x))$ ve $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının $0x$ -ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen dönel yüzeyin ΔA alanı, $[PQ]$ 'nin

dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin (kesik koninin) yüzey alanları yaklaşık olarak, eşittir. Şu halde;

$$\begin{aligned}\Delta A &\cong 2\pi \frac{|PS| + |QR|}{2} \cdot |PQ| \\ \Delta A &= 2\pi \frac{|f(x)| + |f(x + \Delta x)|}{2} \sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x + \Delta x) - f(x)]^2} \\ \Delta A &= 2\pi \frac{|f(x)| + |f(x + \Delta x)|}{2} \sqrt{1 + \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]^2} \cdot \Delta x\end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = 2\pi \frac{|f(x)| + |f(x + \Delta x)|}{2} \sqrt{1 + \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]^2}$$

olur. Δx ne kadar küçük seçilirse bu yaklaşıklık o kadar iyi olur. f türevlenebilir olduğunda

$$A' = 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

olur. İntegral hesabının temel teoreminden

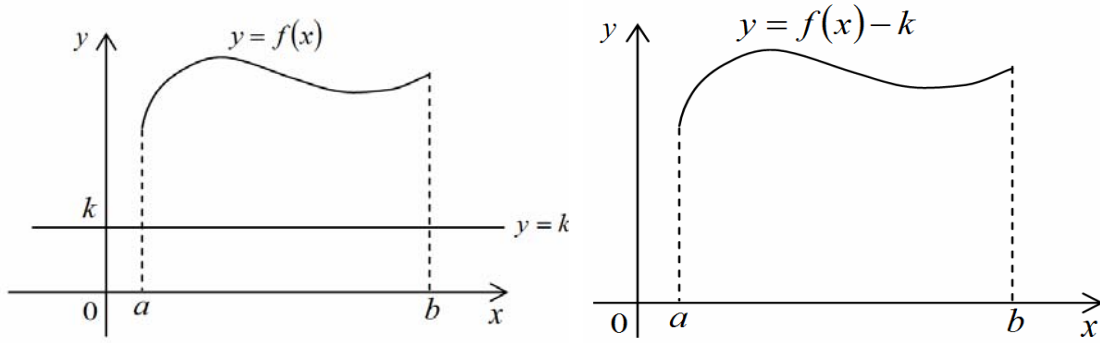
$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

bulunur. Benzer olarak, denklemi $x = u(y)$, $c \leq y \leq d$ olan eğri parçasının $0y$ - eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı

$$A = 2\pi \int_c^d |u(y)| \sqrt{1 + [u'(y)]^2} dy = 2\pi \int_c^d |x| \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

olacaktır.

$y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı; $y = f(x) - k$, $a \leq x \leq b$ eğri parçasının $y = 0$ ($0x$ - eksenini) doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı aynı olacaktır (Bkz. Şekil 3.17.).



Şekil 3.17.

Diğer taraftan $[f(x) - k]' = f'(x)$ olacağından, $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x) - k| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_a^b |y - k| \sqrt{1 + (y')^2} dy$$

bulunur. Benzer düşünceyle, $x = u(y)$, $c \leq y \leq d$ olan eğri parçasının $x = p$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı

$$A = 2\pi \int_c^d |u(y) - p| \sqrt{1 + [u'(y)]^2} dy = 2\pi \int_c^d |x - p| \sqrt{1 + (x')^2} dx$$

şeklinde ifade edilebilir.

ÖRNEK 3.19.

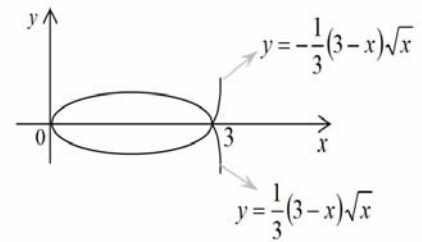
$9y^2 = x(3 - x)^2$ eğrisinin ilmeğini oluşturan eğrinin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

Döndürülen eğri parçası olarak

$$y = -\frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x} \quad \text{veya} \quad y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$$

eğrilerinin $[0, 3]$ aralığındaki parçalarını almak yeterlidir. $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ eğrisinin $[0, 3]$ aralığındaki parçasını $0x$ -ekseni etrafında döndürelim.



$$A = 2\pi \int_0^3 |y| \sqrt{1+(y')^2} dx = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3} (3-x) \sqrt{x} \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{\pi}{3} \int_0^3 (3-x)(x+1) dx = 3\pi \quad br^2$$

ÖRNEK 3.20.

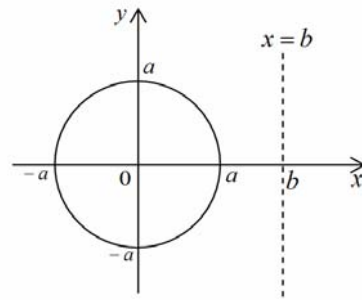
$x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin $x = b$ ($b > a$) doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin (torun) alanını bulunuz.

Çözüm:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} \quad \text{ve} \quad x = -\sqrt{a^2 - y^2}$$

eğri parçasının $x = b$ doğrusu etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeylerin alanları toplamıdır.

Buna göre,



$$A = 2\pi \int_{-a}^a \left| -\sqrt{a^2 - y^2} - b \right| \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2}} dy + 2\pi \int_{-a}^a \left| \sqrt{a^2 - y^2} - b \right| \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2}} dy$$

$$A = 2\pi \int_{-a}^a \left(\sqrt{a^2 - y^2} + b - \sqrt{a^2 - y^2} + b \right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy = 4\pi ab \int_{-a}^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 4\pi ab \cdot \text{Arc sin } \frac{y}{a} \Big|_{-a}^a$$

$$A = 4\pi ab [\text{Arc sin } 1 - \text{Arc sin } (-1)] = 4\pi^2 a \cdot b \quad br^2$$

olur.

Bilindiği gibi, $\sqrt{1+(y')^2} dx$, $y = f(x)$ eğrisinin; $\sqrt{1+(x')^2} dy$ de $x = u(y)$ eğrisinin ds yay diferansiyelidir. Buna göre,

$$a) \quad A = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1+(y')^2} dx \quad \text{formülü} \quad A = 2\pi \int_a^b |y| ds \quad (3.5.)$$

$$b) \quad A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+(x')^2} dy \quad \text{formülü} \quad A = 2\pi \int_a^b |x| ds \quad (3.6.)$$

$$c) \quad A = 2\pi \int_a^b |y - k| \sqrt{1+(y')^2} dy \quad \text{formülü} \quad A = 2\pi \int_a^b |y - k| ds \quad (3.7.)$$

$$d) \quad A = 2\pi \int_a^b |x - p| \sqrt{1+(x')^2} dx \quad \text{formülü} \quad A = 2\pi \int_a^b |x - p| ds \quad (3.8.)$$

3.5.2. Eğri Denkleminin Kutupsal Olarak Verilmesi Halinde Dönel Yüzeyin Alanının Hesabı

Eğri parçasının denklemi $r = f(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

olduğunu biliyoruz. $x = r.\cos \varphi$, $y = r.\sin \varphi$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$A = 2\pi \int_a^b |y| ds$$

formülünden, *verilen eğri parçasının kutupsal eksen* etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzey alanı

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r.\sin \varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

olacaktır. Ayrıca eğrinin $\varphi = \frac{\pi}{2}$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin alanı

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x| ds$$

formülünde

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r.\cos \varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

olur.

ÖRNEK 3.21.

$r = a(1 - \cos \varphi)$ kardioidinin üst yarısının kutup eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$r2' + (r')^2 = a^2(1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi$$

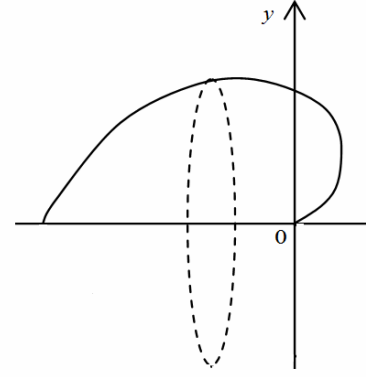
$$r2' + (r')^2 = 2a^2(1 - \cos \varphi) = 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \left(2a \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2$$

olduğundan

$$A = 2\pi \int_0^\pi |r \sin \varphi| \cdot |2a \sin \varphi| d\varphi = 4\pi a^2 \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot$$

$$A = 4\pi a^2 \int_0^\pi 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 16\pi a^2 \int_0^\pi \sin^4$$

$$A = 32\pi a^2 \cdot \frac{1}{5} \sin^5 \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = \frac{32}{5} \pi a^2 \quad br^2$$



bulunur.

3.5.3. Eğri Denkleminin Parametrik Olarak Verilmesi Halinde Dönel Yüzeyin

Alanının Hesabı

Eğri parçasının denklemi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

şeklinde verilmiş olsun. Yüzey alanını veren formülleri vermek için (3.5.) ve (3.6.) formüllerinin t parametresine göre yazmak yetecektir. Bilindiği gibi, eğri parametrik olarak verildiğinde

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

olur. Şu halde (3.5.), (3.6.), (3.7.) ve (3.8.) formülleri

$$a) \quad A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (3.9.)$$

$$b) \quad A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (3.10.)$$

$$c) \quad A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y - k| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (3.11.)$$

$$d) A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x - p| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \quad (3.12.)$$

şeklini alır. Bu integrallerin hesaplanmasında x ve y yerine t cinsinden değerlerin konulması unutulmamalıdır.

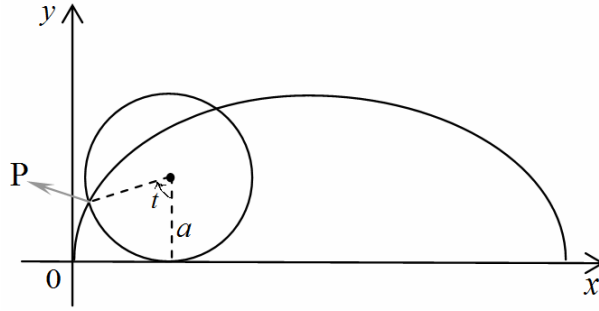
ÖRNEK 3.22.

Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

olan sikloid eğrisinin bir yayının $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



Bir yayın çizilmesi için t parametresi $[0, 2\pi]$ aralığını taramalıdır. Buna göre,

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} a \cdot (1 - \cos t) \cdot \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt$$

$$A = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt$$

$$A = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3} \pi a^2 \quad br^2$$

olur.

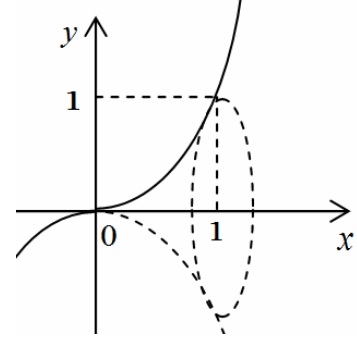
3.5.4. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1) $y = x^3$ eğrisinin $0 \leq x \leq 1$ arasında kalan parçasının $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$A = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^1 |x^3| \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx$$

$$A = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{\pi}{27} \cdot (10\sqrt{10} - 1) \quad br^2$$

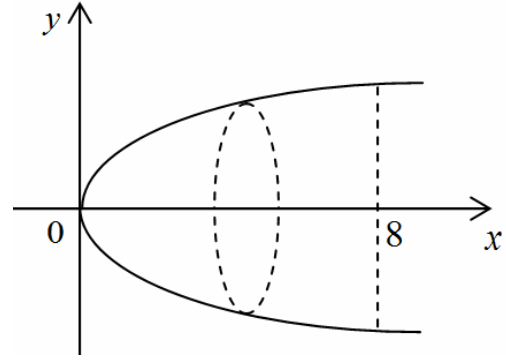


2) $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin $0 \leq x \leq 8$ aralığındaki parçası $0x$ -ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$A = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^8 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$$

$$A = 4\pi \int_0^8 \sqrt{x+1} dx = \frac{208}{27} \pi \quad br^2$$



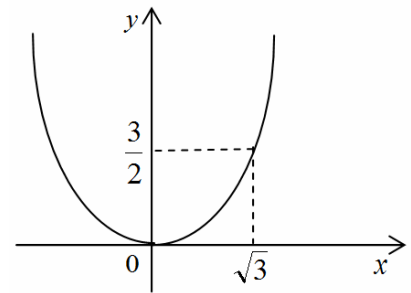
3) $y = \frac{x^2}{2}$ eğrisinin $[0,3]$ aralığındaki parçası $0y$ -ekseni etrafında döndürülüyor.

Meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (x')^2} dx = 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2y} \sqrt{1 + \frac{1}{2y}} dy$$

$$A = \frac{14}{3} \pi \quad br^2$$

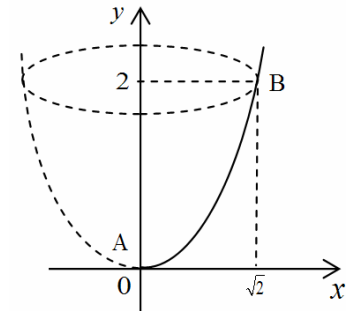


4) $y = x^2$ parabolünün $A(0,0)$ ve $B(\sqrt{2},2)$ noktaları arasındaki parçasının $0y$ -ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy$$

$$A = \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4y} dy = \frac{13}{3} \pi \quad br^2$$



5) Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olan eğri parçasının $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$A = 2\pi \int_0^1 |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 2\pi \int_0^1 3t \sqrt{(4t)^2 + (3)^2} dt = 6\pi \int_0^1 t \sqrt{9 + 16t^2} dt$$

$$A = 24\pi \int_0^1 t \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + t^2} dt = 24\pi \cdot \frac{1}{3} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + t^2 \right]^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{49}{4} \pi \quad br^2$$

6) $r = 2a \cdot \cos \phi$ eğrisi $\phi = \frac{\pi}{2}$ doğrusu etrafında döndürüldüğünde meydana gelen

dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$A = 2\pi \int_0^\pi |r \cdot \cos \phi| \sqrt{r^2 + (r')^2} d\phi = 2\pi \int_0^\pi |2a \cdot \cos \phi \cdot \cos \phi| \sqrt{4a^2 \cdot \cos^2 \phi + 4a^2 \cdot \sin^2 \phi} d\phi$$

$$A = 4a\pi \int_0^\pi \sqrt{4a^2} \cos^2 \phi d\phi = 8a^2 \cdot \pi \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi = 4a^2 \cdot \pi^2 \quad br^2$$

3.5.5. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER

1) Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeylerin alanlarını hesaplayınız.

a) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq 3$

b) $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

2) $y = \ln x$ eğrisinin $1 \leq x \leq 2$ aralığındaki parçası $0y$ -ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

3) Orjin ile (h, r) noktasını birleştiren doğru parçasının $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan koninin yanal alanını bulunuz.

4) Yarıçapı R olan bir kürenin yüzey alanını bulunuz.

5) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisinin $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

6) $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin $[x_1, x_1 + h]$ aralığına karşılık gelen parçasının $0x$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen küre parçasının yüzey alanını bulunuz.

7) $4x^2 + y^2 = 4$ elipsinin üst yarısının $0y$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

8) Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

olan astroid eğrisinin $0y$ -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

9) Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 \\ y = 4 - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

olan eğrinin koordinat eksenleriyle kesim noktaları arasında kalan parçasının Ox - eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10) Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a.(t - \sin t) \\ y = a.(1 - \cos t) \end{cases}$$

olan eğri veriliyor.

a) Oy -ekseni,

b) En yüksek noktasına teğet olan doğru

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

BÖLÜM 4

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

İntegralleme aralığının sonsuz olması yahut integralleme aralığında fonksiyonun sınırlı olmaması halindeki integraller ortaya çıkar. Bu çeşit integrallere “*genelleştirilmiş integraller*” denir.

4.1. İntegralleme Aralığının Sonsuz Olması Hali

f fonksiyonu $[a, +\infty)$ aralığında tanımlı ve $\forall u \in (a, \infty)$ için $[a, u]$ aralığında integrallenebilir olsun. Eğer

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx$$

Limiti genelleştirilmiş bir reel sayı olarak mevcut ise, bu limite f fonksiyonunun “*a’den sonsuza kadar integrali*” denir ve

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx \quad (4.1)$$

yazılır. Eğer bu genelleştirilmiş reel sayı sonlu ise, (4.1) integraline yakınsak, sonsuz ise yahut bu limit mevcut değilse, ıraksaktır denir.

ÖRNEK 4.1.

$\int_0^\infty e^{-x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-e^{-x} \right) \Big|_0^u = 1$$

ÖRNEK 4.2.

$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \operatorname{Arc} \tan x \Big|_0^u = \frac{\pi}{2}$$

ÖRNEK 4.3.

$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \cos x \, dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \sin x \Big|_0^u$$

bu limit mevcut değildir. Dolayısıyla bu integral ıraksaktır.

ÖRNEK 4.4.

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln u \Big|_0^u = \infty$$

yani bu integral de ıraksaktır.

Bunun gibi, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ integrali de şöyle tanımlanır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u f(x) \, dx \quad (4.2)$$

ÖRNEK 4.5.

$\int_{-\infty}^0 \frac{1+x}{1+x^2} \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1+x}{1+x^2} \, dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^0 \frac{1+x}{1+x^2} \, dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\operatorname{Arc} \tan x + \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right] \Big|_{-u}^0 = \frac{\pi}{2} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log(1+u^2)$$

bulunur ki, besbelli yakınsak değildir.

4.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 'in İntegrali

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^a f(x) dx + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

$$(b) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u f(x) dx$$

Bunlardan birincisine göz önüne alınan genelleştirilmiş integralin **âdi değeri**; ikincisine ise **Cauchy esas değeri** denir. Eğer ortaya çıkan genelleştirilmiş integraller yakınsak iseler, sonuçlar aynıdır. Fakat bazı hallerde âdi değer sonlu olmadığı halde, Cauchy esas değeri sonlu olabilir. Bunun sebebi, (a)'nın sağ tarafında her iki integralin ıraksaması, (b)'nin sağ tarafında ise sonsuza giden değerlerin birbirini götürmesidir.

ÖRNEK 4.6.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1+x}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^0 \frac{1+x}{1+x^2} dx + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \frac{1+x}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

sağ tarafta birinci integralin yakınsamadığını son örnekten dolayı biliyoruz. Aynı şekilde sağ taraftaki ikinci integral de yakınsamaz. Şu halde, göz önüne aldığımız integralin âdi değeri sonlu bir sayı değildir.

Buna karşılık

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\text{Arc tan } x + \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_{-u}^u \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\text{Arc tan } u + \frac{1}{2} \log(1+u^2) - \text{Arc tan }(-u) - \frac{1}{2} \log(1+u^2) \right] \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} [\text{Arc tan } u - \text{Arc tan }(-u)] \\
&= \lim_{u \rightarrow \infty} 2 \text{Arc tan } u = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

bulunur.

Ancak, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ genelleştirilmiş integralinin hesabında Cauchy esas değerinin istendiği açıkça belirtilmemişse, yapılacak iş, bunun âdi değerini hesap etmektir.

4.3. Yakınsaklık Kriterleri. Mutlak Yakınsak İntegraller

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ şeklinde bir genelleştirilmiş integralin hangi şartlar altında yakınsak olduğunu araştıralım. Böylece $\int_a^{\infty} f(x) dx$ şeklindeki genelleştirilmiş integrallerin de incelenmiş olacağı açıktır, çünkü

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = -\int_b^{\infty} f(x) dx = \int_{-b}^{\infty} f(x) dx$$

dir.

4.3.1. f 'nin Negatif Olmaması Halinde $\int_a^{\infty} f(x) dx$ İntegralinin Yakınsaklığı:

Eğer $\forall x \in [a, \infty)$ için $f(x) \geq 0$ ve $u > a$ için f fonksiyonu $[a, u]$ boyunca integrallenebiliyorsa

$$F(u) = \int_a^u f(x) dx \quad (4.3)$$

fonksiyonu u 'nun monoton artan bir fonksiyonudur. Şu halde (4.3) integralinin yakınsaması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

4.3.2. Seriler ile Olan Benzerlik:

Genelleştirilmiş integraller ile sonsuz seriler arasında büyük benzerlik vardır. Gerçekten, $[a, \infty)$ aralığını gelişigüzel bölüm noktaları ile $\{a, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ şeklinde böldüğümüzü düşünelim. Bu takdirde, bilindiği gibi

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx + \dots \quad (4.4)$$

dir. Sağ tarafın terimlerini $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ile gösterirsek, demek ki $\sum_1^{\infty} c_n$ sonsuz serisi söz konusudur. Bu serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart parçal (kısmî) toplamlar dizisinin bir Cauchy dizisi olmasıdır. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0(\varepsilon)$ sayısının bulunmasıdır ki, $n > n_0(\varepsilon)$ ve $k \geq 1$ için

$$|S_{n+k} - S_n| = |c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+k}| < \varepsilon$$

kalmasıdır. Bunu (4.4)'e uygularsak şu neticeye varırız: $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integralinin

yakınsak olmsa için gerek ve yeter şart $x_n > n_0$ ve $x_{n+k} > n_0$ için

$$\left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx + \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} f(x) dx \right| = \left| \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

olmasıdır. Buradan şunu bulduk:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ yakınsak} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists u_0 > a \ni u \text{ ve } u' > u_0$$

olunca $\left| \int_u^{u'} f(x) dx \right| < \varepsilon$ olur. Görüldüğü gibi, burada f 'nin negatif olmaması şartı yoktur.

ÖRNEK 4.7.

$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ integrali yakınsaktır. Çünkü $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük olarak

seçilmiş bir sayı olmak üzere, $\frac{2}{\varepsilon} < u < u'$ için

$$\begin{aligned} \int_u^{u'} \frac{\sin x}{x} dx &= -\frac{\cos x}{x} \Big|_u^{u'} - \int_u^{u'} \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= \frac{\cos u}{u} - \frac{\cos u'}{u'} - \int_u^{u'} \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

yani

$$\left| \int_u^{u'} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \frac{\cos u}{u} - \frac{\cos u'}{u'} - \int_u^{u'} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{u} + \frac{1}{u'} + \int_u^{u'} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u'} + \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_u^{u'} = \frac{2}{\varepsilon}$$

dir. Öte yandan

$$\left| \int_u^{u'} f(x) dx \right| \leq \int_u^{u'} |f(x)| dx$$

olduğundan demek ki $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ integrali yakınsaktır.

4.3.3. Eğer $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ integrali yakınsak ise, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integrali de yakınsaktır.

4.3.4. Mutlak Yakınsaklık:

Eğer $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ integrali yakınsak ise, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integrali için mutlak yakınsaktır,

denir.

4.3.5. Mukayese Kriteri:

Eğer $x \geq a$ için g fonksiyonu negatif değilse, $\int_a^\infty g(x) dx$ integrali yakınsak ise ve a 'yı aşan bir yerden itibaren, yani $x \geq a_0 \geq a$ için daima $|f(x)| \leq g(x)$ bulunuyorsa ve f , her sonlu $[a, b]$ aralığında integrallenebiliyorsa, $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali mutlak yakınsaktır.

Buradan şu kriteri elde ederiz.

4.3.6. Eğer $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali mutlak yakınsak ve g fonksiyonu sınırlı ise, örneğin $\forall x \in [a, \infty)$ için $|g(x)| \leq M$ oluyorsa $\int_a^\infty f(x) \cdot g(x) dx$ integrali mutlak yakınsaktır.

Gerçekten $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali mutlak yakınsak olduğundan, istenildiği kadar küçük bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\int_u^{u'} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{M}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$\left| \int_u^{u'} f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \int_u^{u'} |f(x) \cdot g(x)| dx \leq M \int_u^{u'} |f(x)| dx < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

dir.

ÖRNEK 4.8.

$\int_0^\infty \frac{\sin nx}{m^2 + x^2} dx$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

Verilen integral mutlak yakınsaktır. Çünkü, $\int_0^\infty \frac{dx}{m^2 + x^2}$ mutlak yakınsak ve $g(x) = \sin nx$ fonksiyonu sınırlıdır.

Şimdi $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (4.5)$$

integralini göz önüne alalım. $\alpha = 1$ için integralin sonlu bir değere yakınsamadığını biliyoruz. $\alpha \neq 1$ için (4.5) integralini hesap edersek

$$\int_a^u \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_a^u = \frac{1}{1-\alpha} [u^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}]$$

buluruz. Eğer $\alpha > 1$ ise, sağ tarafın $u \rightarrow \infty$ için limiti sonlu bir sayıdır. Fakat $\alpha < 1$ ise bu limit sonsuz olur.

Demek ki (4.5) integrali $\alpha > 1$ için yakınsak, $\alpha \leq 1$ için ıraksaktır. Buradan yararlanarak aşağıdaki kriterleri verebiliriz:

$x \in [a, \infty)$ için f fonksiyonu sabit işaretli, örneğin pozitif olsun. Eğer $x \rightarrow \infty$ iken f fonksiyonu birinci mertebeden daha yüksek mertebeden sıfır oluyorsa, yani öyle bir $k > 1$ sayısı var ki, $B \in \mathbb{R}$ sabit bir pozitif sayıyı ifade etmek üzere, x ne kadar büyük olursa olsun. $0 < f(x) < \frac{B}{x^k}$ kalsın. $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali yakınsaktır.

Bunun gibi, eğer f pozitif ise ve $x \rightarrow \infty$ iken en fazla birinci mertebeden sıfır oluyorsa, yani x sonsuz olurken $f(x) \geq \frac{M}{x}$ kalacak şekilde bir M pozitif sayısı varsa, yukarıdaki integral ıraksaktır.

Gerçekten, birinci halde $u > a$ için

$$\int_a^u f(x) dx \leq B \int_a^u \frac{dx}{x^k}$$

dir ve $u \rightarrow \infty$ için sağdaki integral yakınsak olduğundan $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali yakınsaktır. Aynı şekilde ikinci halde de

$$\int_a^u f(x) dx \geq M \int_a^u \frac{dx}{x^k}$$

dir ve $u \rightarrow \infty$ için sağdaki integral ıraksak olduğundan $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali de ıraksaktır.

ÖRNEK 4.9.

$\int_0^\infty e^{-mx} \cdot \sin nx \, dx \quad (m > 0)$ integralini inceleyiniz.

Çözüm:

$$\left| \int_0^\infty e^{-mx} \cdot \sin nx \, dx \right| \leq \int_0^u \left| \frac{\sin nx}{e^{mx}} \right| dx \leq \int_0^u \frac{dx}{x}$$

dir. öte yandan $v \in \mathbb{N}$ için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^v}{e^{mx}} = 0$ olduğundan, $\frac{1}{e^{mx}}$ fonksiyonu istenilen her mertebeden daha yüksek mertebeden sıfır olur. O halde bize sorulan integral yakınsaktır, hatta mutlak yakınsaktır, çünkü görüldüğü gibi, $\int_0^\infty |f(x)| dx$ yakınsak

olmaktadır.

Şimdi integrali hesap edelim:

$$\begin{aligned} \int_0^u e^{-mx} \cdot \sin nx \, dx &= -\frac{e^{-mx} \cdot \sin nx}{m} \Big|_0^u + \frac{n}{m} \int_0^u e^{-mx} \cdot \cos nx \, dx \\ &= -\frac{e^{-mu} \cdot \sin nu}{m} + \frac{n}{m} \left(-\frac{e^{-mx} \cdot \cos nx}{m} \right) \Big|_0^u - \frac{n^2}{m^2} \int_0^u e^{-mx} \cdot \sin nx \, dx \\ &= -\frac{e^{-mu} \cdot \sin nu}{m} + \frac{n}{m^2} (1 - e^{-mu} \cos nu) - \frac{n^2}{m^2} \int_0^u e^{-mx} \cdot \sin nx \, dx \\ &= \frac{m^2}{m^2 + n^2} \left[\frac{n}{m^2} - e^{-mu} \left(\frac{\sin nu}{m} + \frac{n \cdot \cos nu}{m^2} \right) \right] \\ &= \frac{n}{m^2 + n^2} - \frac{e^{-mu}}{m^2 + n^2} (m \cdot \sin nu + n \cdot \cos nu) \end{aligned}$$

olup

$$\int_0^\infty e^{-mx} \cdot \sin nx \, dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{m^2 + n^2} - \frac{m \cdot \sin nu + n \cdot \cos nu}{e^{mu} (m^2 + n^2)} \right) = \frac{n}{m^2 + n^2}$$

buradan sonucunu elde ederiz.

ÖRNEK 4.10.

$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

Bu integralin mutlak yakınsak olduğu açıktır. Değeri ise

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{x} \Big|_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} = 1$$

dir.

4.4. ÇÖZÜLMÜŞ PROBLEMLER

1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+3x^2+x^3}$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm:

İntegral içindeki $x \rightarrow \infty$ iken üçüncü mertebeden, yani 1'den büyük, sıfır olduğu için yakınsaktır.

2) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+\cos^2 x}$ integrali yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm:

İntegral içindeki ifade sürekli, yani integrallenebilir. Aynı zamanda $x \geq 1$ için pozitiftir. $x \rightarrow \infty$ iken bu ifade birinci mertebeden sıfır olduğundan, 4.3.6.'dan dolayı bu integral ıraksaktır.

3) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm:

İntegral içindeki ifade $x \geq 4$ için sürekli ve pozitiftir. Bu ifade $x \rightarrow \infty$ için $\frac{3}{2}$ 'nci mertebeden sıfır olduğundan verilen integral yakınsaktır.

4) $\int_1^{\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm:

$$1 - \cos \frac{2}{x} = 2 \sin^2 \frac{1}{x}$$

dir ve $x \rightarrow \infty$ için, yani aç ı çok küçüldüğünde, bu ifade yaklaşık olarak $\frac{2}{x^2}$ 'dir. O halde integral yakınsaktır.

5) $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm:

$x = \sqrt{t}$ koyalım. Buradan

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

olup şimdi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt + \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

olarak yazalım. Sağdaki ilk integral âdi integraldir, çünkü

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \cdot \frac{\sin t}{t} = 0$$

dır. İkinci integral ise, parçal integralleme ile

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = -\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \Big|_{\pi/2}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt = -\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt$$

olur. Fakat bu son integral 4.3.5. gereğince mutlak yakınsaktır, çünkü

$$\left| \frac{\cos t}{t^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$$

dir.

$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$ ve $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$ integrallerine **Fresnel integralleri** denir.

$\frac{1}{t^{3/2}}$ fonksiyonunda $\frac{3}{2} > 1$ olduğundan yakınsaktır. Böylece $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$

integralinin yakınsak olduğu gösterilmiş oldu.

6) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \cos^2 x}$ genelleştirilmiş integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ olduğundan, demek ki $\log x$ birinci mertebeden daha küçük

mertebeden sonsuz olur. O halde $x \rightarrow \infty$ iken $\frac{\log x}{1+x^2}$ ifadesi 1'den büyük

mertebeden sıfır olur, yani integral yakınsaktır.

İstenilen değeri hesap etmek için $x = \tan t$ koyalım. Buradan $dx = (1 + \tan^2 t) dt$ olur. O halde

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/2} [\log(\sin t) - \log(\cos t)] dt$$

olur. Sağ tarafta ikinci integralde $t = \frac{\pi}{2} - z$ koyalım.

$$\int_0^{\pi/2} \log(\cos t) dt = - \int_{\pi/2}^0 \log \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - z \right) \right] dz = \int_0^{\pi/2} \log(\sin t) dt$$

olduğundan

$$I = \int_0^{\pi/2} [\log(\sin t) - \log(\cos t)] dt = 0$$

elde edilir.

7) f ve g fonksiyonları $x \geq u > a$ için integrallenebilsinler. Eğer bu x 'ler için

$f(x) \leq g(x)$, f negatif değil ve $\int_a^{\infty} g(x) dx$ yakınsak ise, gösteriniz ki $\int_a^{\infty} f(x) dx$

integrali de yakınsaktır. Fakat, eğer $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali ıraksıyor ise, $\int_a^\infty g(x) dx$

integrali de ıraksar.

Çözüm:

Gerçekten $\int_a^\infty g(x) dx$ integralinin yakınsak olması demek, 4.3.1.'den dolayı bu

integralin sınırlı olması demektir. $\int_a^u f(x) dx \leq \int_a^u g(x) dx$ olduğundan ve $u \rightarrow \infty$

için $\int_a^\infty g(x) dx$ integrali sınırlı bulunduğundan, $\int_a^\infty f(x) dx < \infty$ olur, yani

yakınsaktır.

Eğer $\int_a^\infty f(x) dx$ integrali ıraksıyorsa, $\int_a^\infty g(x) dx$ integrali de ıraksamak zorundadır,

çünkü yakınsak olsaydı, $\int_a^u f(x) dx \leq \int_a^u g(x) dx$ 'den ve biraz önce

belirttiklerimizden dolayı $\int_a^\infty f(x) dx$ integralinin de yakınsak olması gerekirdi. Bu

kritere “**Mukayese Kriteri**” denir.

8) f ve g fonksiyonları $x \geq u > a$ için integrallenebilsinler. $f > 0$, $g > 0$

olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ olsun. $L \in (0, \infty)$ ise, $\int_a^\infty f(x) dx$ ve $\int_a^\infty g(x) dx$

integrallerinin ya her ikisi de yakınsak yahut her ikisi de ıraksaktır.

Çözüm:

Gerçekten, $\varepsilon > 0$ sayısını önceden istenildiği kadar küçük seçelim. Limitin tanımı gereğince, yeter derecede büyük x 'ler için, örneğin $x > u$ için

$$\frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon \quad \text{veya} \quad f(x) < (L + \varepsilon) \cdot g(x)$$

dir. Öte yandan, eğer $\int_a^{\infty} g(x) dx$ yakınsak ise, c sabit bir sayı olmak üzere

$\int_a^{\infty} c \cdot g(x) dx$ de yakınsaktır ve

$$\int_a^{\infty} c \cdot g(x) dx = c \int_a^{\infty} g(x) dx$$

dir. bu kritere “**Limit Kriteri**” denir.

4.5. ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER

1) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx$

2) $\int_0^{\infty} \frac{x^{12}}{(x^5 + 2x^3 + 3)^3} dx$

3) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$

4) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx$

4.6. İntegralleme Aralığında Fonksiyonun Sonsuzluk Yerlerinin Bulunması Hali

Bir f fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun ve $u < b$ olmak üzere, $[a, u]$ aralığı üzerinden integrallenebilsin. Eğer fonksiyon $[u, b)$ aralığında, yani b ’nin bir sol komşuluğunda sınırlı değilse,

$$\int_a^b f(x) dx \quad (4.6)$$

integraline yine genelleştirilmiş integral denir. a ’nın bir sağ komşuluğunda sınırlı olmayan bir f fonksiyonu için de (4.6) integrali bir genelleştirilmiş integraldir.

Örneğin $\alpha > 0$ olmak üzere $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ integrali bir genelleştirilmiş integraldir, çünkü $x \rightarrow 0$ için integral içindeki fonksiyon sonsuza gider.

TANIM:

f fonksiyonu $[a, b]$ kompakt aralığında b bitim noktası hariç, sürekli olsun. Bu takdirde (4.6) genelleştirilmiş integrali, sağdaki integral mevcut olmak şartıyla,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$$

olarak tanımlanır. Şu halde soldaki genelleştirilmiş integral için “yakınsaktır” deyimi kullanılır. Eğer sağdaki limit mevcut değilse, genelleştirilmiş integral için “ıraksaktır” denir.

$[a, b]$ boyunca integrallenebilen fakat b noktasında bir sonsuzluk yeri olan bir f fonksiyonunun $\int_a^b f(x) dx$ genelleştirilmiş integralinin mevcut olup olmadığını anlamak için aşağıdaki kriter çok faydalıdır.

TEOREM:

$x \in [a, b]$ için f fonksiyonu pozitif olsun ve $u < b$ olmak üzere her $[a, u]$ aralığı boyunca integrallenebilsin. Ayrıca $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ olsun. Eğer $0 < \lambda < 1$ şartını sağlayan bir λ sayısı ve x 'e bağlı olmayan sabit bir K sayısı varsa öyle ki, $\forall x \in [a, b)$ için $f(x) \leq \frac{K}{(b-x)^\lambda}$ olsun. $\int_a^b f(x) dx$ genelleştirilmiş integrali yakınsaktır.

Buna karşılık $f(x) \geq \frac{K}{(b-x)^\lambda}$ olacak şekilde bir λ sayısı ve bir K pozitif sabiti

varsa $\int_a^b f(x) dx$ genelleştirilmiş integrali ıraksaktır.

İSPAT:

Önce yakınsaklık halini gösterelim.

$$\lambda \in (0,1) \text{ ve } K > 0 \text{ sayılarını } \forall x \in [a,b) \text{ için } f(x) \leq \frac{K}{(b-x)^\lambda} \text{ olacak}$$

şekilde aldığımızı düşünelim. Şu halde

$$0 \leq \int_a^{b-\delta} f(x) dx \leq K \int_a^{b-\delta} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \left[\frac{K}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{(b-x)^{\lambda-1}} \right]_a^{b-\delta} = \frac{K}{1-\lambda} \left[\frac{1}{\delta^{\lambda-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}} \right]$$

dir. $\delta \rightarrow 0$ için son ifadenin limiti

$$\frac{K}{(\lambda-1)(b-a)^{\lambda-1}}$$

dir, yani genelleştirilmiş integral yakınsaktır.

Eğer $\lambda > 1$ ise, $\delta \rightarrow 0$ için son ifadenin limitinin sonlu olmadığı görülmektedir.

$\lambda = 1$ olması halinde ise,

$$K \int_a^{b-\delta} \frac{dx}{b-x} = K \cdot \log(b-x) \Big|_{b-\delta}^a = K [\log(b-a) - \log \delta]$$

olduğundan $\delta \rightarrow 0$ için limit yine sonlu bir sayı değildir.

Bu kriteri şöyle ifade edebiliriz.

$$\int_a^b f(x) dx \text{ integrali } b \text{ noktasında genelleştirilmiş bir integral, yani } f$$

fonksiyonu $x=b$ için sonsuz olsun. Eğer f fonksiyonu $x=b$ yerinde birinci mertebeden daha küçük mertebeden sonsuz oluyorsa, bu genelleştirilmiş integral yakınsaktır. Eğer bu noktada en az birinci mertebeden sonsuz oluyorsa, bu genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

ÖRNEK 4.11.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ integralini inceleyiniz.}$$

Çözüm:

Verilen integral genelleştirilmiş integraldir. Çünkü integral içindeki fonksiyon üst sınırdaki sonsuz olmaktadır.

$x=1$ için integral içindeki ifade $\frac{1}{2}$ 'nci mertebeden sonsuz olduğundan, bu integral yakınsaktır.

ÖRNEK 4.12.

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integralinin yakınsak olup olmadığını bulunuz.

Çözüm:

Yukarıdaki çözümde anlatılan sebepten dolayı bu integral de yakınsaktır.

ÖRNEK 4.13.

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$ integralini inceleyiniz.

Çözüm:

Bu integral mevcut değildir. Çünkü integralin içindeki fonksiyon alt sınırdaki birinci mertebeden sonsuz olur.

ÖRNEK 4.14.

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1)$ integralini inceleyiniz.

Çözüm:

Verilen eliptik integral yakınsaktır, çünkü integral işareti altındaki fonksiyon $\frac{1}{2}$ 'nci mertebeden sonsuz olur.

RASYONEL FONKSİYONLARI İNTEGRALI

$$1) \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad (n \neq -1)$$

$$2) \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

$$3) \int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{a^2(n+2)} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{a^2(n+2)} + c \quad (n \neq -1 \wedge n \neq -2)$$

$$4) \int \frac{x dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln|ax+b| + c$$

$$5) \int \frac{x dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2} \ln|ax+b| + c$$

$$6) \int \frac{x dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{b}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} \right] + c$$

$$7) \int \frac{x^2 dx}{ax+b} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{(ax+b)^2}{2} - 2b(ax+b) + b^2 \ln|ax+b| \right] + c$$

$$8) \int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3} \left[ax+b - 2b \ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b} \right] + c$$

$$9) \int \frac{a^2 dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a^3} \left[\ln|ax+b| + \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{2(ax+b)^2} \right] + c$$

$$10) \int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{(n-3)(ax+b)^{n-3}} + \frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} \right] + c$$

$$11) \int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + c$$

$$12) \int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + c$$

$$13) \int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -a \left[\frac{1}{b^2(ax+b)} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| \right] + c$$

$$14) \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arc} \cot \frac{x}{a} + c$$

$$15) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| + c$$

$$16) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{Arc} \tan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + c_1 \quad (4ac - b^2 > 0)$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + c_1$$

$$17) \int \frac{x \, dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} + c_1$$

$$18) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{2ax + b}{(n-1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{(2n-3) \cdot 2a}{(n-1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + c_1$$

$$19) \int \frac{x \, dx}{x(ax^2 + bx + c)} = \frac{1}{2c} \ln \left| \frac{x^2}{ax^2 + bx + c} \right| - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} + c_1$$

KÖKLÜ İFADELERİN İNTEGRALI

$$1) \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{a} \right) + c$$

$$2) \int x\sqrt{a^2 - x^2} \, dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$3) \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \, dx = a^2 - x^2 - a \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + c$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{a} + c$$

$$5) \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{a} + c$$

$$6) \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \cdot \operatorname{Arcsh} \frac{x}{a} \right) + c$$

$$7) \int x\sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{3} (x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2} + c$$

$$8) \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} \, dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + c$$

$$\begin{aligned}
9) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c \\
10) \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \sqrt{x^2 + a^2} + c \\
11) \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c \\
12) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} &= -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + c \\
13) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} &= -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + c \\
14) \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right) + c \\
15) \int x \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &= \frac{1}{3} (x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2} + c \\
16) \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \, dx &= \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \text{Arc cos} \frac{a}{x} + c \\
17) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + c \\
18) \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \sqrt{x^2 - a^2} + c \\
19) \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \cdot \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right) + c \\
20) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} - \ln \left| 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + 2ax + b \right| + c_1
\end{aligned}$$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALI

$$\begin{aligned}
1) \int \sin ax \, dx &= -\frac{1}{a} \cos ax + c \\
2) \int \sin^n ax \, dx &= -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx \\
3) \int x \cdot \sin ax \, dx &= \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cdot \cos ax}{a} + c
\end{aligned}$$

- 4) $\int x^n \cdot \sin ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cdot \cos ax \, dx$
- 5) $\int \frac{\sin ax}{x} \, dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - + \dots$
- 6) $\int \frac{\sin ax}{x^n} \, dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} \, dx$
- 7) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$
- 8) $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}$
- 9) $\int \frac{dx}{1 \mp \sin ax} = \frac{1}{a} \tan \left(\frac{ax}{2} \mp \frac{\pi}{4} \right) + c$
- 10) $\int \frac{x \, dx}{1 + \sin ax} = \frac{x}{a} \tan \left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \cos \left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$
- 11) $\int \frac{x \, dx}{1 - \sin ax} = \frac{x}{a} \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) \right| + c$
- 12) $\int \frac{\sin ax}{1 \mp \sin ax} \, dx = \mp x + \frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2} \right) + c$
- 13) $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$
- 14) $\int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \cdot \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx$
- 15) $\int x \cdot \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \cdot \sin ax}{a} + c$
- 16) $\int x^n \cdot \cos ax \, dx = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cdot \sin ax \, dx$
- 17) $\int \frac{\cos ax}{x} \, dx = \ln |ax| - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - + \dots$
- 18) $\int \frac{\cos ax}{x^n} \, dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} \, dx$
- 19) $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$

$$20) \int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$$

$$21) \int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a} \cdot \tan \frac{ax}{2} + c$$

$$22) \int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a} \cdot \cot \frac{ax}{2} + c$$

$$23) \int \frac{x dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a} \cdot \tan \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \cdot \ln \left| \cos \frac{ax}{2} \right| + c$$

$$24) \int \frac{x dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a} \cdot \cot \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \cdot \ln \left| \sin \frac{ax}{2} \right| + c$$

$$25) \int \frac{\cos ax dx}{1+\cos ax} = x - \frac{1}{a} \cdot \tan \frac{ax}{2} + c$$

$$26) \int \frac{\cos ax dx}{1-\cos ax} = -x - \frac{1}{a} \cdot \cot \frac{ax}{2} + c$$

$$27) \int \frac{dx}{\cos ax \mp \sin ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + c$$

$$28) \int \frac{dx}{(\cos ax \mp \sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \tan \left(ax \mp \frac{\pi}{4} \right) + c$$

$$29) \int \frac{\cos ax}{\cos ax \mp \sin ax} dx = \frac{1}{2a} \left[\mp ax + \ln |\cos ax \mp \sin ax| \right] + c$$

$$30) \int \frac{\sin ax}{\cos ax \mp \sin ax} dx = \mp \frac{1}{2a} \left[ax \mp \ln |\cos ax \mp \sin ax| \right] + c$$

$$31) \int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| + c$$

$$32) \int \tan^n ax dx = \frac{1}{a(n-1)} \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax dx$$

$$33) \int \frac{\tan^n ax}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a(n+1)} \cdot \tan^{n+1} ax + c$$

$$34) \int \frac{dx}{\tan ax \mp 1} = \mp \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \mp \cos ax| + c$$

$$35) \int \frac{\tan ax dx}{\tan ax \mp 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \mp \cos ax| + c$$

$$36) \int \cot ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + c$$

$$37) \int \cot^n ax \, dx = \frac{1}{a(n-1)} \cot^{n-1} ax - \int \cot^{n-2} ax \, dx$$

$$38) \int \frac{\cot^n ax}{\sin^2 ax} \, dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cot^{n+1} ax + c$$

$$39) \int \frac{dx}{1 \mp \cot ax} = \int \frac{\tan ax \, dx}{\tan ax \mp 1}$$

ÜSTEL FONKSİYONLARIN İNTEGRALI

$$1) \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$2) \int x \cdot e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + c$$

$$3) \int x^2 \cdot e^{ax} \, dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) + c$$

$$4) \int x^n \cdot e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cdot e^{ax} \, dx$$

$$5) \int \frac{e^{ax} \, dx}{x} = \ln|x| + \frac{ax}{1.1!} + \frac{(ax)^2}{2.2!} + \dots$$

$$6) \int \frac{e^{ax} \, dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a \int \frac{e^{ax} \, dx}{x^{n-1}} \right)$$

$$7) \int e^{ax} \ln|x| \, dx = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \ln|x| - \int \frac{e^{ax} \, dx}{x} \right)$$

$$8) \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cdot \sin bx - b \cos bx) + c$$

$$9) \int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cdot \cos bx + b \sin bx) + c$$

$$10) \int e^{ax} \cdot \sin^n x \, dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cdot \sin x - n \cdot \cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cdot \sin^{n-2} x \, dx + c$$

$$11) \int e^{ax} \cdot \cos^n x \, dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cdot \cos x + n \cdot \sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cdot \cos^{n-2} x \, dx + c$$

LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALI

$$1) \int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + c$$

$$2) \int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x + c$$

$$3) \int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx \quad (n \neq 1)$$

$$4) \int \frac{dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2.2!} + \frac{(\ln x)^3}{3.3!} + \dots$$

$$5) \int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

$$6) \int x^m \cdot \ln x \, dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) + c \quad (m \neq -1)$$

$$7) \int x^m \cdot (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m \cdot (\ln x)^{n-1} \, dx + c \quad (m \neq -1 \wedge n \neq -1)$$

$$8) \int \frac{(\ln x)^n \, dx}{x} = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + c$$

$$9) \int \frac{\ln x \, dx}{x^m} = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} + c \quad (m \neq 1)$$

$$10) \int \frac{(\ln x)^n \, dx}{x^m} = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1} \int \frac{(\ln x)^{n-1} \, dx}{x^m} \quad (m \neq 1 \wedge n \neq -1)$$

$$11) \int \frac{x^m \, dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m \, dx}{(\ln x)^n} \quad (n \neq -1)$$

$$12) \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \ln |\ln x| + c$$

$$13) \int \frac{dx}{x^n \cdot \ln x} = \ln |\ln x| - (n-1) \ln x + \frac{(n-1)^2 (\ln x)^2}{2.2!} - \frac{(n-1)^3 (\ln x)^3}{3.3!} + \dots$$

$$14) \int \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^n} = \frac{1}{(n-1) \cdot (\ln x)^{n-1}} + c \quad (n \neq 1)$$

$$15) \int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c$$

$$16) \int \cos(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + c$$

$$17) \int e^{ax} \ln x \, dx = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \ln x - \int \frac{e^{ax}}{x} \, dx \right)$$

EK – 2

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALI

$$1) \int \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} dx = x \cdot \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$2) \int x \cdot \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \cdot \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$3) \int x^2 \cdot \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} + \frac{x^2 + 2a^2}{9} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$4) \int \operatorname{Arcos} \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \cdot \operatorname{Arcos} \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$5) \int x \cdot \operatorname{Arcos} \frac{x}{a} dx = x \cdot \operatorname{Arcos} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$6) \int x^2 \cdot \operatorname{Arcos} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{Arcos} \frac{x}{a} - \frac{x^2 + 2a^2}{9} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$7) \int \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} dx = x \cdot \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + c$$

$$8) \int x \cdot \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} dx = \frac{a^2 + x^2}{2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + c$$

$$9) \int x^2 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2) + c$$

$$10) \int x^n \cdot \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2} dx \quad (n \neq -1)$$

$$11) \int \operatorname{Arccot} \frac{x}{a} dx = x \cdot \operatorname{Arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + c$$

$$12) \int x \cdot \operatorname{Arccot} \frac{x}{a} dx = \frac{x^2 + a^2}{2} \operatorname{Arccot} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} + c$$

$$13) \int x^2 \cdot \operatorname{Arccot} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arccot} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(x^2 + a^2) + c$$

$$14) \int x^n \cdot \operatorname{Arccot} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{Arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2} dx + c$$

EK – 3

HİPERBOLİK FONKSİYONLARI İNTEGRALI

$$1) \int shax \, dx = \frac{1}{a} chax + c$$

$$2) \int chax \, dx = \frac{1}{a} shax + c$$

$$3) \int sh^2 ax \, dx = \frac{1}{4a} sh2ax - \frac{x}{2} + c$$

$$4) \int ch^2 ax \, dx = \frac{1}{4a} sh2ax + \frac{x}{2} + c$$

$$5) \int \frac{dx}{shax} = \frac{1}{a} \ln \left| th \frac{ax}{2} \right| + c$$

$$6) \int \frac{dx}{chax} = \frac{2}{a} Arc \tan(e^{ax}) + c$$

$$7) \int x \cdot shax \, dx = \frac{1}{a} x \cdot chax - \frac{1}{a^2} shax + c$$

$$8) \int x \cdot chax \, dx = \frac{1}{a} x \cdot shax - \frac{1}{a^2} chax + c$$

$$9) \int thax \, dx = \frac{1}{a} \ln |chax| + c$$

$$10) \int cthax \, dx = \frac{1}{a} \ln |shax| + c$$

$$11) \int Arcsh \frac{x}{a} \, dx = x \cdot Arcsh \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2} + c$$

$$12) \int Arcch \frac{x}{a} \, dx = x \cdot Arcch \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} + c$$

$$13) \int Arcth \frac{x}{a} \, dx = x \cdot Arcth \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln |a^2 - x^2| + c$$

$$14) \int Arccth \frac{x}{a} \, dx = x \cdot Arccth \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln |x^2 - a^2| + c$$

KAYNAKLAR

1) YURTSEVER Berki, Matematik Analiz Dersleri, cilt:1 (Birinci Kısım). Bir Değişkenli Fonksiyonlar.

İstanbul: Matbaa Teknisyenleri Basımevi – 1978

2) YURTSEVER Berki, Matematik Analiz Dersleri, cilt:1 (İkinci Kısım). Bir Değişkenli Fonksiyonlar.

Ankara: Ekonomist Basımevi – 1981

3) BALCI Mustafa, Matematik Analiz, cilt:1

Ankara: Ankara Üniversitesi Basımevi – 1985

3) SABAN Giacomo, Analize Giriş

İstanbul: İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevi – 1989