



ÜNİTE

DENKLEM ve EŞİTSİZLİKLER

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 4(x+h)] - [x^2 + 4x]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h - x^2 - 4x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 4h}{h} \end{aligned}$$

- Eşitsizlikler

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

(Eşitsizlikler)



Hedefler

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;



Birinci ve ikinci dereceden eşitsizlikleri çözebilmek

için gerekli bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

İçindekiler

DENKLEM ve EŞİTSİZLİKLER

Eşitsizlikler

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

İkinci Dereceden Eşitsizlikler

EŞİTSİZLİKLER

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax+b = 0$ ifadesine birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denildiğini görmüştük. Bu ifadedeki $=$ yerine $<, >, \leq, \geq$ sembollerinin kullanılmasıyla oluşan ifadeye ise **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

Bu eşitsizlikleri sağlayan sayıların oluşturduğu kümeye de **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir. $ax + b = 0$ denkleminin kökü olan $x = -\frac{b}{a}$, yine eşitsizliğin de kritik noktasıdır. Çözüm kümesiyle ilgili kuralı içeren tablo aşağıda belirtilmiştir.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	a'nın işaretinin tersi	\bigcirc	a'nın işaretinin aynı

Örnek:

$2x - 4 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: 1.yol: $2x < 4 \Rightarrow x < 2$ dir. Çözüm kümesi $= \{ -\infty, 2 \}$ dir.

2.yol: $a = 2, b = -4$; ayrıca, $2x - 4 = 0$ ise $x = 2$ dir.

Tabloda yerine yazarsak

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x - 4$		$-$	$+$

$2x - 4 < 0$ sorulduğundan tabloda negatif bölgeyi işaretleriz.

Buradan da çözüm kümesi: $(-\infty, 2)$ dir.



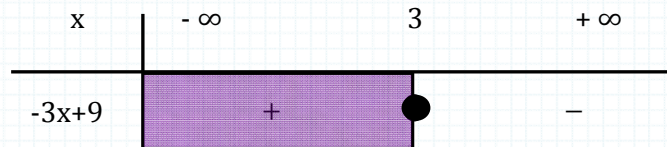
Not: Buradaki gibi $<$ ve $>$ sembolü kullanılan sorularda, denklemin kökü çözüm kümesine dâhil değildir ve açık aralık olarak yazılır.

Örnek:

$3x + 9 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini tablo ile bulalım.

Çözüm: $a = -3$ ve $b = 9$ ve $-3x + 9 = 0$ ise $x = 3$ olacaktır.

Tabloda yerine yazarsak



Bize $-3x + 9 \geq 0$ sorulduğundan tabloda pozitif bölgeyi işaretleriz.

Öyleyse çözüm kümesi : $(-\infty, 3]$ dir.



Not: Buradaki gibi \leq ve ya \geq sembolü kullanılan sorularda, denklemin kökü çözüm kümesine dâhildir ve kapalı aralık olarak yazılır.



Alıştırma: Sizde aşağıda verilen eşitsizliklerin çözüm kümesini tablo ile bulunuz.

1. $5x - 7 \geq 3x$

2. $5-2x < 0$

İkinci Dereceden Eşitsizlikler

1. $ax^2 + bx + c$ üç terimlisinin işaret incelemesi:

$ax^2 + bx + c$ ifadesinin işaret tablosu $\Delta = b^2 - 4ac$ 'nin durumuna göre incelenir. Var olan kökler tabloda küçükten büyüğe sıralanarak yazılır. Oluşturulan aralıkların işaretleri belirlendikten sonra eşitsizliğin yönüne göre istenilen aralık taranarak çözüm kümesi belirlenir.

- a) $\Delta > 0$ ise ; $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin x_1 ve x_2 gibi iki farklı gerçel kökü olsun.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a'nın işaretinin aynı	a'nın işaretinin tersi	a'nın işaretinin aynı	

- b) $\Delta = 0$ ise ; $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ gibi çakışık iki kökü vardır.

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a'nın işaretinin aynı		a'nın işaretinin aynı

- c) $\Delta < 0$ ise ; $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin reel sayı kökü yoktur.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a'nın işaretinin aynı	

Örnek:

$x^2 - 3x + 2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: Öncelikle verilen ifadenin köklerini bulalım. $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 = 1$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ dir.}$$

Tabloda yerine yazarsak

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	●	●	+

Soruda; $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ sorulduğundan çözüm kümesi, sıfıra eşit ve negatif olan aralıktır.

Öyleyse, çözüm kümesi $[1, 2]$ dir.

Örnek:

$-2x^2 - 5x + 3 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm: $a = -2$, $b = -5$ ve $c = 3$ olduğundan

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 49 \text{ bulunur.}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{-4} = -3 \text{ dür.}$$

Tabloda yerleştirirsek

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 - 5x + 3$	-	○	○	-

Soruda; $-2x^2 - 5x + 3 < 0$ sorulduğundan çözüm kümesi, negatif olan aralıklardır, sınır değerleri dahil değildir.

Öyleyse, çözüm kümesi $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ dir. (veya $\mathbb{R} - [-3, \frac{1}{2}]$ dir.

2. Çarpım ve Bölüm Durumundaki Eşitsizlikler

$$f(x) = \frac{P(x).Q(x)}{H(x)} \quad \text{biçimindeki bir eşitsizliğin işareti incelenirken } H(x) \neq 0$$

olmak üzere $P(x), Q(x)$ ve $H(x)$ polinomlarının kökleri ayrı ayrı bulunup tek bir tabloya yerleştirilir. Tabloda işareti belirlemek için yapılması gereken şöyledir:

- Önce bütün polinomların baş katsayılarının işaretine göre genel işaret belirlenir.
- Tablo oluşturulup daha önceden bulduğumuz bütün kökler küçükten büyüğe tabloya yerleştirilir.
- En son olarak tablonun sağından genel işaret ile işaretlemeye başlanır.
- Her kökte işaret değiştirilip sola doğru ilerlenir.



Not: Çift katlı köklerde ve mutlak değer kökünde işaret değiştirmeden devam edilir.

Örneğin; $f(x) = \frac{(x^2+6x+9).(x-2)}{(1-x^2)} \leq 0$ ifadesinin işaret tablosunu inceleyip

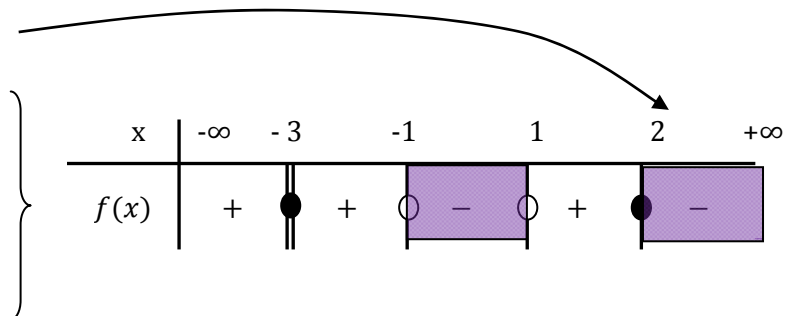
çözüm kümesini bulalım.

Genel işaret: $\frac{(+x^2).(+x)}{-x^2} \rightarrow \frac{+.+}{-} = -$ dir.

$(x^2 + 6x + 9) = 0$ ise kökleri $x_1 = x_2 = -3$ tür.

$(x - 2) = 0$ ise kökü $x = 2$ dir.

$(1 - x^2) = 0$ ise kökleri $x = 1$ ve $x = -1$ dir.



Öyleyse, polinomun çözüm kümesi $(-1, 1) \cup [2, +\infty)$



Dikkat: -3 teki iki çizgi çift katlı kök olduğu anlamındadır. Ayrıca, paydanın kökleri polinomu tanımsız yaptığından dolayı çözüm kümesine alınmaz.

Örnek:

$$\frac{(1-x)^2 \cdot (x+2)^3}{-x \cdot |x+1|} > 0 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.}$$

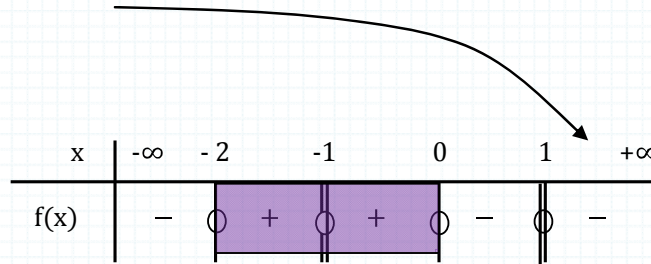
Çözüm: Genel işaret: $\frac{(-x)^2 \cdot (+x)^3}{-x \cdot |x+1|} \rightarrow \frac{+ \cdot +}{- \cdot +} = - \text{ dir.}$

$(1-x)^2 = 0$ ise kökleri $x_1=x_2=1$ dir.

$(x+2)^3 = 0$ ise kökleri $x_1=x_2=x_3=-2$ dir.

$-x = 0$ ise kökleri $x=0$ dir.

$|x+1| = 0$ ise kökleri $x=-1$ dir.



Öyleyse, istenilen çözüm kümesi $(-2, 0) - \{-1\}$ dir.



Dikkat: $(x+2)^3$ ifadesi 3. dereceden olduğu için çift katlı sayılmaz. Ayrıca, $|x+1|$ ifadesinin kökü mutlak değer olduğundan çift katlı kabul edilir.



Alıştırma: Sizde verilen ifadelerin çözüm kümelerini bulunuz.

1. $\frac{3}{x^2-1} \leq \frac{1}{x+1}$

2. $\frac{3x+1}{x^2-1} \geq 1$

3. $\frac{(x^2-4x-5) \cdot (2-x)^2}{-x^3-x^2} \leq 0$